aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Obligasi Bencana Alam dengan Suku Bunga Stokastik dan Pendekatan Campuran

Dian Anggraini[1], Yasir Wijaya[2]
[1]*IAIN Raden Intan Lampung : dee.diananggraini@yahoo.com*
[2]*Badan Pusat Statistik Kabupaten Lampung Utara*

Submitted : 15-04-2016, Revised : 24-05-2016, Accepted : 16-06-2016

Abstract

This study contains the group claims model as discussed by (Lee, 2007) for the pricing of natural disaster bonds. This research was conducted with several stages. First make the formula of bond price with stochastic interest rate and disaster event following non homogeneous poisson process. It further estimates the parameters of disaster loss data from the Insurance Information Institute (III) from 1989 to 2012 and interest rates from the Federal Reserve Bank. Because the determination of aggregate distribution is difficult to be exact, numerical calculation is done by mixed approach method (Gamma and Inverse Gaussian) to determine the solution of natural disaster bond price. Finally, shows how the impact of financial risk and disaster risk on the price of natural disaster bonds.
***Keywords:** Aggregate Loss; CAT bonds; CIR; NHPP.*

Abstrak

Penelitian ini berisi tentang model klaim berkelompok seperti yang dibahas oleh (Lee, 2007) untuk penentuan harga obligasi bencana alam. Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahap. Pertama membuat rumus harga obligasi dengan suku bunga stokastik dan kejadian bencana mengikuti proses poisson tak homogen. Selanjutnya mengestimasi parameter dari data yang kerugian bencana dari Insurance Information Institute (III) terhitung tahun 1989 sampai dengan 2012 serta suku bunga dari Federal Reserve Bank. Karena penentuan distribusi *aggregate* dirasa sulit secara *exact*, maka dilakukan mperhitungan secara numerik dengan metode pendekatan campuran (Gamma dan Inverse Gaussian) untuk menentukan solusi harga obligasi bencana alam. Terakhir, memperlihatkan bagaimana pengaruh resiko finansial dan resiko bencana terhadap harga obligasi bencana alam.
Kata Kunci: *Aggregate Loss*; CIR; CAT *bonds;* NHPP.

PENDAHULUAN

Catastrophe risk atau resiko bencana alam merupakan kerugian yang ditimbulkan dari bencana alam seperti gempa bumi, angin badai atau angin topan dan banjir, dimana kejadiannya tidak terjadi secara periodik tetapi sulit untuk diprediksi kapan tepatnya akan terjadi (Lee, 2007). Industri asuransi dihadapkan pada masalah serius untuk resiko bencana alam, seperti kerugian yang disebabkan oleh Badai Andrew (1992) menghabiskan sekitar \$30 juta serta Badai Katrina (2005) menghabiskan sekitar \$40-60 juta (Muerman, 2008).

Perusahaan asuransi tradisional biasanya meng*cover* sebagian atau keseluruhan kerugian yang diakibatkan oleh bencana alam, tetapi tidak banyak yang bertahan dalam menawarkan produk asuransi bencana alam. Sehingga ditemukan gagasan mengapa asuransi tersebut tidak di *linked*-kan dengan instrumen keuangan, seperti opsi, obligasi, swap, future dan sebagainya. Ilmuwan berlomba-lomba dalam mengembangkan teorinya sampai pada akhirnya ditemukan bahwa resiko yang ditimbulkan dari bancana alam banyak diminati konsumen jika di *linked*-kan dengan obligasi. Inilah yang dikenal sebagai Catastrophe (CAT) *Bond* (Cox, 2000).

Seperti bencana alam yang sulit untuk diprediksi, valuasi terhadap CAT *bond* juga sulit dilakukan. Perkembangan studi terhadap pemodelan harga CAT *bond* berperan sebagai pencegahan dan peringatan terhadap bencana. Tetapi kebanyakan studi saat ini tidak mencantumkan banyak faktor yang berakibat pada penentuan harga CAT *bond* (Rinaldi, 2015). Dalam penelitian ini diperhatikan variasi dari faktor yang mempengaruhi penentuan harga obligasi bencana, seperti distribusi dari kerugian yang diakibatkan oleh bencana alam, banyaknya kejadian, ketentuan *threshold* dan suku bunga yang tidak tetap. Sebagai hasilnya didapatkan rumus sederhana untuk CAT *bonds*dalam suku bunga stokastik dan menunjukkan bahwa proses *loss* mengikuti *compound nonhomogeneous Poisson Process*. Selain itu juga mendapatkan model *aggregate loss* dari model kejadian dan kerugian dengan bantuan pendekatan campuran. Terakhir yaitu mendapatkan model perhitungan harga *CAT bonds* dengan dan tanpa kupon dari beberapa data pendukung.

METODE PENELITIAN

Tulisan ini merupakan studi pustaka yang merupakan telaah dari literatur. Teknik pengumpulan data ini dengan mengadakan studi penelahaan terhadap buku-buku literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan. Setelah informasi yang relevan ditemukan, peneliti kemudian "mereview" dan menyusun bahan pustaka sesuai dengan urutan kepentingan dab relevansinya dengan masalah yang sedang diteliti. Bahan-bahan informasi yang diperoleh kemudian dibaca, dicatat, diatur, dan ditulis kembali.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Model Aggregate Dari Kerugian Bencana Alam

Aggregate klaim dalam portofolio asuransi *non-life* merupakan jumlahan dari resiko individu selama periode waktu tertentu, atau dituliskan sebagai variabel random *S.* Dimisalkan jumlahan dari variabel random $X_j;\quad j=1,2,3,...,N_t$, dengan X_j merupakan variabel kerugian (*loss* atau *severity*) yaitu banyaknya uang yang dikeluarkan pada waktu ke-*j*. Sedangkan N_t merupakan variabel frekuensi klaim yang terjadi pada waktu ke-*t,* jumlahannya adalah :

$$S=\sum_{j=1}^{N_t} X_j. \tag{0.1}$$

Sehingga fungsi distribusi untuk *S* dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \Pr(S \le s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N_t = n) \Pr\left(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{N_t} \le s\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N_t = n) F_X^{*n}(s). \end{aligned} \tag{0.2}$$

Dalam perusahaan asuransi maupun reasuransi untuk menentukan distribusi dari *S*, banyak macamnya. Akan tetapi sering ditemui bahwa untuk menentukan distribusi dari *S* bukan perkara mudah. Simulasi mungkin bisa menjadi solusi, tetapi banyak terdapat situasi yang sangat membutuhkan banyak waktu. Misalnya saja yang selama ini dikenal seperti metode rekursi panjer, metode konvolusi, FFT (*Fast Fourier Transform*) dan lain sebagainya. Walaupun demikian, beberapa moment dari *S* relatif mudah dihitung dan cukup untuk menghasilkan beberapa pendekatan dari fungsi distribusi.

Sebagai literatur, cukup banyak artikel yang membahas pendekatan yang tepat untuk distribusi *S* dan itu semua akurat, seperti Seal (1977), Pentikainen (1977) dan Gendrom and Crepeau (1989). Belakangan ini, Chaubey et al. (1998) mengenalkan bebearapa pendekatan baru. Bebarapa pendekatan untuk distribusi *S*, diantaranya Normal Power (NP), Edgeworth, Gamma, Inverse Gaussian (IG) dan Gamma – IG. Dalam pembahasan disini, akan dibahas pendekatan campuran (yaitu Gamma – IG) yang akan digunakan dalam menentukan fungsi distribusi untuk *S.*

Proses *Aggregate* dengan Metode Pendekatan Campuran

Pendekatan Inverse Gaussian – Gamma adalah kombinasi dari pendekatan Inverse Gaussian dan pendekatan Gamma (Chaubey et al., 1998) dengan fungsi distribusi diberikan pada persamaan berikut (Bain, 1992):

$$f_S(s) \approx f_{gamma-IG}(s) = \omega f_{gamma}(s) - (1-\omega) f_{IG}(s) \tag{11}$$

dengan :

$$\omega = \frac{\kappa_4 - \kappa_{4IG}}{\kappa_{4Gamma} - \kappa_{4IG}} = \frac{\kappa_4 - \frac{5}{3}\kappa_3^2}{\frac{3}{2}\kappa_3^2 - \frac{5}{3}\kappa_3^2} = \frac{10\kappa_3^2 - 6\kappa_4}{\kappa_3^2},$$ κ_3 = *skewness* dan κ_4 = kurtosis dari *S*.

Model Suku Bunga CIR

Model CIR tersebut menggambarkan dinamika dari tingkat suku bunga *r(t)* (Gang Ma, 2013) yang merupakan solusi persamaan diferensial stokastik. Model CIR membentuk persamaan berikut :

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t) \tag{10}$$

dengan :

$dr(t)$: perubahan tingkat suku bunga pada interval waktu yang pendek

α : kecepatan dari mean reversion

β : menyatakan rata-rata tingkat bunga dalam jangka waktu panjang

σ : menyatakan standar deviasi dari perubahan tingkat bunga persatuan waktu

$\{W(t), t \ge 0\}$: proses gerak brown standar.

Selanjutnya parameter dari model CIR dinotasikan dengan $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ (Klugman, 2004).

Ekspektasi model CIR

Misalkan : $Y(t) = f\left(t, r(t)\right) = r(t)e^{\alpha t}$

Sehingga : $$dY(t) = e^{\alpha t}dr(t) + \alpha e^{\alpha t} r(t)dt \qquad (11)$$

Selanjutnya dengan mesubtitusikan persamaan diatas, didapat :

$$dY(t) = \alpha\beta e^{\alpha t}dt + e^{\alpha t}\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \qquad (12)$$

Kemudian mengintegralkan persamaan (12) dari 0 sampai dengan *t*, maka :

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \alpha\beta e^{\alpha s}ds + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s). \qquad (13)$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan $Y(t) = f\left(t, r(t)\right) = r(t)e^{\alpha t}$ ke persamaan (13), diperoleh :

$$r(t)e^{\alpha t} = r(0) + \beta\left(e^{\alpha t} - 1\right) + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s) \qquad (14)$$

Selanjutnya dengan mengekspektasikan persamaan (14), maka :

$$e^{\alpha t}E\left[r(t)\right] = E\left[r(0)\right] + E\left[\beta\left(e^{\alpha t} - 1\right)\right] + E\left[\int_0^t e^{\alpha s}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s)\right] \qquad (15)$$

Dengan menggunakan sifat integral Ito, yaitu ekspektasi dari Integral Ito adalah nol, maka berlaku $E\left[\int_0^t e^{\alpha s}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s)\right] = 0$ sehingga persamaan (15) menjadi:

$$E\left[r(t)\right] = \beta(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t}r(0). \qquad (16)$$

Variansi Model CIR

Sebelum ditemukan variansi, akan ditemukan terlebih dahulu $E\left[r^2(t)\right]$ dengan menggunakan formula Ito untuk menghitung $dr^2(t)$, dimana $dr^2(t) = df(t, r(t))$ dengan $f(r(t)) = r^2$, maka:

$$E\left[r^2(t)\right] = e^{-2\alpha t}E\left[r^2(0)\right] + \beta^2\left(e^{-\alpha t} - 1\right)^2 + 2\beta e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)r(0)$$
$$+\sigma^2\left[\frac{\beta}{2\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)^2 + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)r(0)\right] \qquad (17)$$

Variansi untuk model CIR, yaitu :

$$Var\left[r(t)\right] = \sigma^2\left[\frac{\beta}{2\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)^2 + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)r(0)\right]. \qquad (18)$$

STUDI KASUS

Deskripsi data

Data yang digunakan dalam studi kasus ini adalah data riil kejadian bencana alam di Amerika terdiri dari data banyak kejadian dan kerugian akibat bencana diambil dari *Insurance Information Institute* (III) dan data bulanan suku bunga dari *Federal Reserve Bank*. Kedua data yang dipakai terhitung dari bulan Januari 1989 sampai dengan Desember 2012.

Berikut ini ditampilkan data yang akan digunakan dalam studi kasus, yaitu :

aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Tabel 1. Kejadian dan Kerugian Bencana Alam

Event	Date	PCS loss ($)	In 2013 dollars ()
Hurricane Hugo	17/09/1989	4.2	6.937
Wildland Fire Oakland Hills	21/10/1991	1.7	2.623
Hurricane Andrew	24/08/1992	15.5	23.386
Winter Storm	11/03/1993	1.75	9.75
Northridge Earthquake and Winter storm	17/01/1994	13.3	22.1
Hurricane Opal	04/10/1995	2.1	11.4
Hurricane Georges	21/09/1998	2.95	8.35
Hurricane Floyd	14/09/1999	1.96	2.2595
Wind and Thunderstorm Event	06/04/2001	2.2	2.799
Tropical Storm Allison	05/06/2001	2.5	3.099
Terrorist attack in US	11/09/2001	18.78	19.379
Wind and Thunderstorm Event	02/05/2003	3.21	3.938
Hurricane Charley	13/08/2004	7.48	8.939
Hurricane Frances	03/09/2004	4.59	5.495
Hurricane Ivan and Jane	15/09/2004	10.77	8.502
Hurricane Katrina	25/08/2005	41.1	47.622
Hurricane Rita	20/09/2005	5.62	6.52
Hurricane Wilma	24/10/2005	10.3	11.934
Hurricane Ike	12/09/2008	12.5	13.426
Wind and Thunderstorm Event	12/05/2010	2	2.106
Wind and Thunderstorm Event	04/10/2010	2.7	2.843
Wind and Thunderstorm Event	22/04/2011	7.3	7.54
Wind and Thunderstorm Event	20/05/2011	6.9	7.127
Wind and Thunderstorm Event	02/03/2012	2.5	2.538
Wind and Thunderstorm Event	28/04/2012	2.5	2.538
Hurricane Sandy	28/10/2012	18.75	19.033

Source : Property Claims Services, INC. (ISO), insurance information institute

Data dalam Tabel 4.1 menerangkan *event*, tanggal kejadian dan kerugian yang ditimbulkan akibat bencana alam baik pada tahun tersebut dan yang sudah dikonversi ke tahun 2013. Badai Katrina yang terjadi pada tahun 2005 merupakan bencana yang menimbulkan kerugian terbesar selama sepanjang tahun 1989 sampai dengan 2012 yaitu sebesar $ 41.1 . Badai Andrew yang terjadi pada tahun 1992 dengan kerugian sebear $ 15.5 merupakan bakal pemikiran memunculkan ide penerbitan *CAT Bond* yang bertujuan melakukan perlindungan sekuritas terhadap resiko finansial yang terjadi akibat bencana tersebut. Data kerugian kemudian dibawa ke waktu 2013 dalam mata uang dolar.

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Tabel 2. Suku bunga Bulanan

Time Periode	Rate
1989-01	9.12
1989-02	9.36
1989-03	9.85
1989-04	9.84
1989-05	9.81
1989-06	9.53
1989-07	9.24
1989-08	8.99
1989-09	9.02
1989-10	8.84
...	...
2012-11	0.16
2012-12	0.16

Source : Federal Reserve Bank

Dalam Tabel 4.2 diperlihatkan sebagaian data yang dipakai untuk memodelkan suku bunga CIR. Data ini termasuk data bulanan dari bulan Januari 1989 sampai dengan Desember 2012. Pertama yang dilakukan dalam studi kasus yaitu memvalidasi bahwa data kejadian bencana alam mengikuti proses NHPP (Shreve, 2004). Kemudian melakukan *fitting* distribusi untuk data kerugian akibat bencana. Selanjutnya mendapatkan model CIR untuk data suku bunga. Setelah itu membuat bagian *aggregate* dari data yang dimiliki. Seperti yang telah dibahas pada subbab 3.3 bahwa perhitungan *aggregate* tidak dilakukan secara *exact* dengan metode yang selama ini diketahui, tetapi menggunakan pendekatan campuran. Penggunaan pendekatan campuran dikarenakan tidak diberikan data secara terperinci seberapa banyak investor yang melakukan klaim pada saat terjadinya bencana. Oleh karena itu, metode *exact* tidak dapat digunakan. **Validasi Asumsi Proses Poisson Non-homogen (NHPP)** (Ross, 1996)

Berdasarkan waktu terjadnya *event* yang ada dalam tabel sebelumnya, dalam kasus bencana seluruh dunia selama 13 tahun yang dihitung dari pembagian bulan serta diasumsikan bahwa kejadian terjadi secara independen. Hipotesis yang digunakan yaitu dalam validasi bahwa event menyebar secara NHPP adalah:

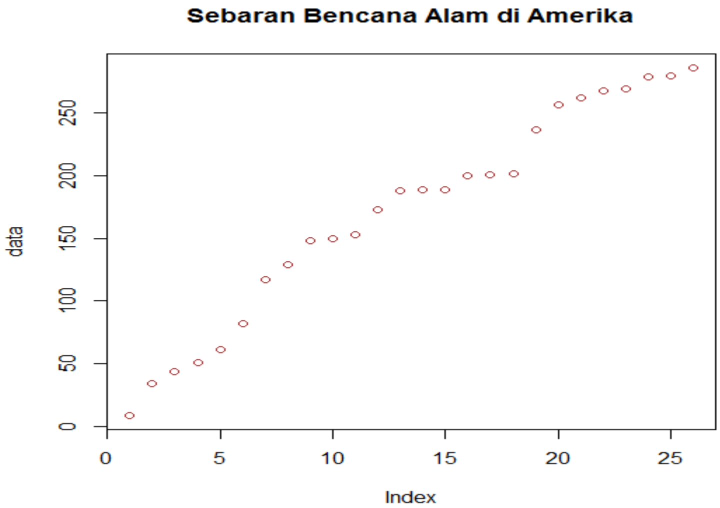
$H_0 : Data\ tidak\ menyebar\ secara\ NHPP$

$H_1 : Data\ menyebar\ secara\ NHPP$

Ketentuan yang digunakan H_0 ditolak apabila $p-value < \alpha$. Dalam hal ini menggunakan nilai $\alpha = 0.05$.

Berikut sebaran data yang diplot dalam grafik.

aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562



Gambar 1. Plot Sebaran Bencana Alam

Pada Gambar 1 sebaran kejadian bencana alam di Amerika tidak terjadi secara periodik. Hal itu terlihat dari sebaran yang terlalu acak dan tidak ada pengulangan.

Waktu pengamatan jumlah kejadian bencana alam setiap bulannya, $n_i; i = 1, 2, 3, ..., ..., 288$, sebagai berikut :

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, \ldots, \ldots, 1, 0, 0$$

Misalkan ketika waktu kejadian $t_i, i = 1, 2, 3, \ldots, 26$ diurutkan menurut saat terjadinya bencana, maka urutan kejadian tersebut setiap bulannya adalah:

$$9, 34, 44, 51, 61, 82, 117, 129, 148, 150, 153, 173, 188, 189, \ldots, \ldots, 279, 280, 286$$

Dengan menggunakan data yang kita pakai, akan dilakukan uji hipotesis dimana proses kejadian harian dari bencana adalah suatu NHPP. Pertama, uji bahwa himpunan data pertama dari jumlah bencana alam bulanan terdiri dari suatu himpunan dari 288 variabel-variabel acak Poisson yang didistribusikan secara independen dan identik, dengan kata lain bencana alam merupakan HPP. Rata-rata dan variansi sampel jumlah kejadian bencana alam bulanan sebesar :

$$\bar{n} = 0.0902778 \; dan \; s^2 = 0.081913963$$

Sehingga nilai kuantitas pengujian adalah $T = 0.9900831$. Untuk menentukan perkiraan nilai *p-value* dari pengujian tersebut dimana $n_i; i = 1, 2, 3, ..., ..., 288$ adalah variabel-variabel acak Poisson independen dan akan disimulasikan sebanyak 25000 himpunan dari 288 variabel acak Poisson dengan rata-rata 0.0902778 dan kemudian dihitung nilai $T^* = \frac{s^{2*}}{n^*}$ menghasilkan nilai *p-value* 0.0146065. Dengan kata lain, proses kejadian bencana alam bulanan adalah suatu HPP.

Untuk melanjutkan pengujian terhadap hipotesis nol dari suatu HPP, dilakukan perhitungan nilai kuantitas pengujian probabilitas dimana suatu variabel acak Chi-square dengan 24999 derajat kebebasan nilainya mendekati nol. Untuk suatu nilai *p-value* yang kecil maka kesimpulannya menolak hipotesis nol. Jadi, proses kejadian bencana alam bulanan adalah suatu NHPP.

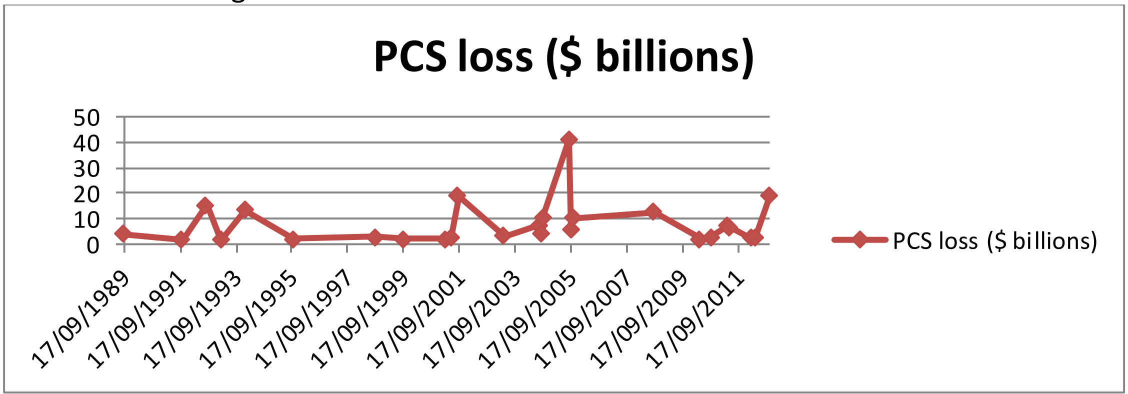
aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Loss-Severity distribution

Kerugian yang ditimbulkan akibat bencana alam, bukan suatu nominal yang kecil (Reijnen, 2003). Terbukti bahwa nominal yang besar disaat yang tidak dapat diprediksi membuat goncangan dalam lembaga sekuritas. Karena event bencana dan kerugian mencakup nilai yang besar dalam jangka waktu yang panjang, dibutuhkan model distribusi *heavy-tailed*, seperti Log – normal, Weibull, Parreto, Burr dan lain-lain. Salah satu alasan pemilihan model distribusi *heavy – tailed* adalah domain dari distribusi ini merupakan bilangan riil positif dan mencakup nilai yang besar dalam jangka waktu yang panjang.

Plot sebaran kerugian :



Gambar 2. Plot Kerugian Bencana Alam tahun 1989 – 2012

Estimasi yang digunakan untuk mengetahui nilai dari masing-masing parameter digunakan metode Moment (untuk distribusi Pareto) dan MLE untuk distribusi lain. Estimasi parameter dan perbandingan nilai *log-likelihood*nya sebagai terlihat sebagai berikut :

Tabel 3. Estimasi Parameter

Distribusi	Log Normal	Gamma	Parreto	Weibull	Inv. Gaussian	GEV
Parameter	σ = 0.882714 μ = 1.643734	α = 1.326905 β = 5.9466573	α = 0.89839 β = 1.7	α = 1.090365 β = 8.195105	λ = 6.5849 μ = 7.8908	κ = 1.233886 σ = 1.78827 μ = 2.883762

Tabel 4. Perbandingan Nilai *log – likelihood*

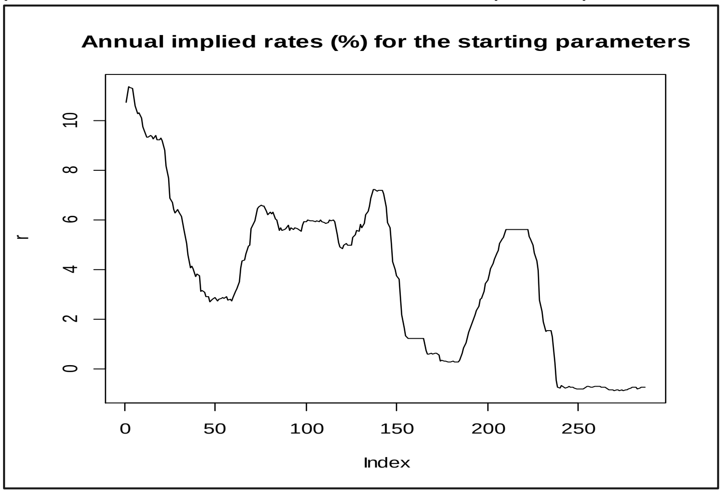
Distribusi	**-(log-likelihood)**
Gamma	79.11553
Lognormal	76.38589
Weibull	79.5305
Pareto	88.83789
Inv. Gaussian	76.54032
GEV	

p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562
Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Pada Tabel 4 berisi nilai estimasi parameter untuk distribusi yang sudah dipilih dan juga nilai *log-likelihood* nya terlihat pada Tabel 4. Berdasarkan keterangan yang ada dalam Tabel 4. tersebutkan bahwa nilai minus log – likelihood terkecil adalah distribusi Lognormal. Dengan kata lain mengatakan bahwa untuk data kerugian yang diakibatkan bencana alam, sifat datanya mengikuti pergerakan secara lognormal dengan estimasi parameternya $\mu = 1.6437343\ dan\ \sigma = 0.882714$.

Suku Bunga

Untuk memodelkan CIR pada bagian ini menggunakan bantuan software R dengan pustaka **SMFI5**. Berikut ini akan ditampilkan plot dari data suku bungan bulanan:



Gambar 3. Plot suku bungan bulanan

Pada Gambar 3, terlihat secara nyata bahwa data suku bunga bulanan memiliki kecenderungan yang cukup jauh di beberapa periode. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter model CIR dengan menggunakan program R, diperoleh nilai parameter untuk model CIR, yaitu :

$$\alpha = 5.2004; \quad \beta = 3.7765; \quad \sigma = 4.2131$$

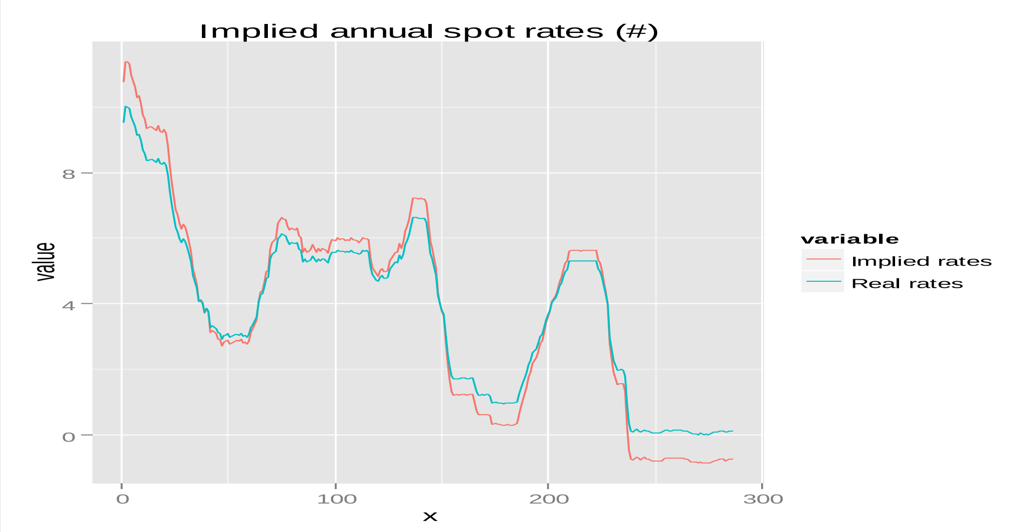
Sehingga model CIR yang digunakan pada penelitian ini memiliki persamaan sebagai berikut :

$$dr(t) = 5.5512\left(3.3765 - r(t)\right)dt + 0.4337\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Dengan nilai *mean reversion*$\hat{\alpha} = 5.5512$ dan $\hat{\beta} = 3.3765$ artinya kecenderungan bahwa data suku bunga akan kembali menuju rata-rata dalam jangka waktu panjang sebesar 3.7578. Selanjutnya akan ditampilkan plot suku bunga real dengan plot estimasi model CIR.

aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62



Dari Gambar diatas terlihat bahwa kurva suku bunga sebenarnya (biru) dan estimasi kurva model CIR (merah) tidak jauh berbeda. Sehingga model yang didapatkan bisa dipakai untuk menentukan suku bunga untuk beberapa periode mendatang, jelas dengan nilai parameter yang sebelumnya telah didapatkan.

Aggregate claim* dan *loss

Bagian ini akan membahas tentang kejadian dan kerugian yang diperumum. Telah didapatkan pada bagian 4.2 dan 4.3 yaitu data kejadian mengikuti proses NHPP dengan rata-rata 0.0902778 dan kerugian mengikuti sifat distribusi lognormal dengan $\hat{\mu} = 1.6437343\ dan\ \hat{\sigma} = 0.882714$. Model yang dipakai disini tidak menggunakan metode *exact*, tetapi menggunakan pendekatan campuran yang telah dibahas pada pembahasan sebelumnya, yaitu karena tidak diketahui secara pasti berapa banyak investor yang melakukan klaim untuk satu kejadian bencana. Dengan kata lain, frekuensi klaim per *loss* tidak ada. Untuk mendapatkan nilai parameter dari distribusi campuran, menggunakan bantuan *software*R dalam pustaka **MASS**,pustaka **fBasics** dan pustaka **stats4** nilainya sebagai berikut:

$$\alpha = 1.326867; \quad \beta = 5.94689; \quad \omega = 3.241587$$

Hasil pendekatan gamma yang diperoleh dtampilkan pada tabel berikut:

Tabel 5. Hasil pendekatan campuran

S	F(s)
1.7	0.924957
1.75	0.925347
1.96	0.926986
2	0.927299
2.1	0.92808
...	...
18.78	0.992557
41.1	0.999733

Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika
Vol. 7, No. 1, 2016, Hal 49 - 62

Pada Tabel 5. ditampilkan hasil dari *aggregate* loss apabila dilakukan dengan pendekatan gamma. Misalkan ingin mengetahui berapa kerugian *aggregate* yang akan masuk dalam perhitungan selanjutnya apabiladiambil nilai batas kerugian pada waktu ke-*t*adalah $ 5 billion, maka yang digunakan untuk perhitungan nilai F(5) = 0.9983056.

Perhitungan Harga Catastrophe Bond

Bagian ini merupakan bagian yang sangat penting dalam penelitian yang dilakukan. Setelah melakukan langkah-langkah dari 4.1 sampai dengan 4.4, maka akan ditemukan nilai CAT *bonds* berdasarkan *time to maturity* (TTM) yang sebelumnya ditentukan.

Contoh kasus :

Diberikan pilihan dua jenis obligasi bencana alam oleh perusahaan XYZ yaitu obligasi bencana alam tanpa kupon dan dengan kupon. Dalam obligasi bencana alam tanpa kupon, investor hanya mendapatkan nilai pengembalian (*redemption value*) pada saat jatuh tempo (*maturity*). Untuk obligasi bencana alam dengan kupon, nilai pokok (sama dengan *redemption value*) tidak terpengaruh walaupun terjadi kerugian akibat bencana alam, tetapi terjadi pemotongan untuk nilai kupon pada periode saat terjadi bencana (apabila terjadi bencana).

Misalkan nilai pokok obligasi bencana alam sebesar $1. Pada saat kontrak awal pembelian obligasi terdapat perjanjian sebagai berikut:

1. Untuk obligasi bencana alam tanpa kupon, apabila terjadi bencana alam pada saat kontrak berjalan, nilai pokok obligasi akan berkurang dan pemberian nilai pokok pada saat jatuh tempo (*maturity*).
2. Apabila kerugian *aggregate* yang dikeluarkan PCS melebihi batas minimal ketetapan kerugian *agggerate* sebesar $ 4, maka investor harus membayarkan sebesar 50% dari nilai pokok yang dibayarkan. Dengan kata lain, nilai pokok obligasi pada akhir periode tidak akan utuh (untuk obligasi bencana alam tanpa kupon).
3. *Maturity* yang dipakai 3 tahun.

Akan ditemukan harga CAT *bond* tanpa kupon dan dengan kupon berdasarkan data yang telah diolah.

4.1.1. *ZeroCouponbon*

Tabel 6. Hasil perhitungan harga obligasi tanpa kupon

```
==================================================
 Simulasi Harga Obligasi Bencana Alam Tanpa Kupon
 D = 4
 T = 3
 p = 0.5
==================================================
   t        Vt
12 3 0.9711809
==================================================
```

Dari Tabel 6 dapat dilihat bahwa ketika terjadi bencana alam dengan krugian *aggregate* minimal $ 4 dalam kurun waktu selama 3 tahun investor membayarkan sebesar $ 0.97118095 untuk mendapatkan $ 1 pada saat jatuh tempo.

Coupon Bond

Dengan contoh kasus yang diberikan, ditetapkan bahwa kupon yang ditawarkan perusahaan kepada investor adalah 10% diberikan setiap kuartal.

aljabar : Jurnal Pendidikan Matematika
p-ISSN 2086-5872
e-ISSN 2540-7562

Tabel 7. Hasil perhitungan harga obligasi dengan kupon

```
==================================================
 Simulasi Harga Obligasi Bencana Alam Dengan Kupon
 D = 4
 T = 3
 C = 0.1
==================================================
   t      Vt2
12 3 1.094236
==================================================
```

Dari Tabel 7 diatas dapat dilihat bahwa harga obligasi bencana alam dengan kupon dengan nilai pokok sama dengan nilai pengembalian (*redemption value*) sebesar $ 1 dengan ketentuan-ketentuan yang telah diberikan, adalah sebesar $ 1.09423619. Artinya ketika terjadi bencana alam dengan krugian minimal $ 4 dalam kurun waktu selama 2.5 tahun investor membayarkan sebesar $ 1.09423619 untuk mendapatkan $ 1.1 pada saat jatuh tempo dan mendapatkan kupon sebesar $ 0.1 setiap akhir peride secara kuartal (apabila tidak terjadi bencana alam kupon tidak dipotong). Selanjutnya akan dilihat pengaruh perubahan parameter D, T, p dan C terhadap perubahan harga obligasi bencana alam tanpa kupon maupun dengan kupon dalam tabel berikut:.

Parameter	Zero Coupon	With Coupon
Waktu Jatuh Tempo (*T*)	Semakin lama waktu jatuh tempo, harga obligasi tidak berubah.	Semakin lama waktu jatuh tempo, harga obligasi tidak berubah.
Batas Minimal Kerugian Aggregate (*D*)	Semakin besar nilai D, maka harga obligasi bencana alam akan semakin mahal.	Semakin besar nilai D, maka harga obligasi bencana alam akan semakin mahal.
Parameter p	Semakin besar prosentase nilai p yang ditetapkan , maka harga obligasi bencana alam akan semakin mahal.	-
Nilai Kupon (*C*)	-	Semakin besar nilai kupon yang akan didapatkan investor, harga obligasi bencana alam akan semakin mahal.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian diatas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Distribusi untuk kerugian *aggregate* memiliki kemencengan dibagian kanan, artinya memiliki nilai yang tak negatif dan unimodal.
2. Metode pendekatan campuran bisa digunakan karena sifat dari distribusi *aggregate* yang memiliki bentuk mirip dengan distribusi gamma dan *inverse gaussian*. Selain itu dalam penerapannya, apabila data frekuensi klaim per-kejadian tidak diketahui, maka bisa menggunakan metode pendekatan campuran.

3. Harga obligasi bencana alam tanpa kupon lebih murah dibandingkan dengan harga obligasi bencana alam dengan kupon.
4. Perubahan waktu jatuh tempo (*maturity date*) *T,* tidak mempengaruhi harga obligasi bencana alam tanpa kupon maupun harga obligasi bencana alam dengan kupon.
5. Perubagan batas nilai minimum kerugian *aggregateD* memberikan dampak perubahan juga terhadap harga. Artinya semakin besar nilai D, maka harga obligasi akan semakin mahal. Hal ini berlaku untuk kedua jenis obligasi yang telah dibahas.
6. Perubahan nilai kupon pada obligasi bencana alam dengan kupon, memberikan dampak yang serius terhadap harga. Artinya, semakin besar nilai kupon, maka harga obligasi bencana alam dengan kupon akan semakin mahal.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics Second Edition.* USA: Duxbury Press, California.

Cox, S. P. (2000). Catastrophe risk bonds, Vol 4, No.4. *North American Actuarial*, 56-82.

Gang Ma, Z. d. (2013). Pricing Catastrophe Risk Bonds : A mixed approximation method. *Journal Insurance : Mathematics and Economics* , 243-254.

Klugman, S. P. (2004). *Loss Models from Data to Decisions Second Edition.* New Jersey, USA: John Wiley and Sons.

Lee, J.-P. M. (2007). *Valuation of Catastrophe Reinsurance with Catstrophe Bonds. Insurance: Mathematics and Economics.*

Reijnen, R. A. (2003). Approximations For Stop – Loss Reinsurance Premiums. *Journal Insurance : Mathematics and Economics*, 237-250.

Rinaldi, A. (2015). Aplikasi Model Persamaan Struktural Pada Program R . *Al-Jabar : Jurnal Pendidikan Matematika*, 1-12.

Ross, S. (1996). *Stochastic Processes Second Edition.* New York, USA: John Wiley and Sons.

Shreve, S. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models.* New York, US: Springer.