
Bukti Informal dalam Pembelajaran Matematika

Billy Suandito

Universitas Katolik Musi Charitas: billy_s@ukmc.ac.id

Abstract

The purpose of this research is to obtain an informal picture of proof that is to prove mathematics without words using only images or geometry in mathematics learning. The research method used is a literature study research method which is a review of a literature. Data collection techniques by conducting study studies on literature books, notes, and reports that have to do with the problem of informally informing learning mathematics. The results of the study from the literature study that in the verification of simple theorems, starting with an informal form of images, then only proceed formally. Indeed, not all theorems can be proven without words, for example an indeterminate integral or a theorem that does not contain numerics. If during this time in the classroom learning teachers provide formal formulas directly without making students active, thinking and finding themselves, it is time to turn to learning that requires students to actively think and find their own knowledge.

Keywords: *Mathematics Education; Informal Proof*

Abstrak

Tujuan dari dilakukannya penelitian ini adalah untuk memperoleh gambaran pembuktian secara informal yaitu pembuktian matematika dengan tanpa kata-kata hanya menggunakan gambar atau geometri dalam pembelajaran matematika. Metode penelitian yang digunakan merupakan metode penelitian studi pustaka yang merupakan telaah dari sebuah literatur. Teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah pembuktian secara informal dalam pembelajaran matematika. Adapun hasil telaah dari studi pustaka bahwa dalam pembuktian teorema-teorema yang sederhana, mulai dengan informal berupa gambar, kemudian baru dilanjutkan secara formal. Memang tidak semua teorema dapat dibuktikan dengan tanpa kata, misalnya integral tak tentu atau teorema yang tidak memuat numerik. Jika selama ini dalam pembelajaran di kelas para guru memberikan rumus formal secara langsung tanpa membuat siswa aktif, berpikir dan menemukan sendiri, maka sudah saatnya berpaling ke pembelajaran yang menuntut siswa aktif berpikir dan menemukan sendiri pengetahuannya.

Kata kunci: *Pembelajaran Matematika; Bukti Informal.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern saat ini. Mengapa demikian?, karena matematika memiliki peran penting yang menjadi sarana dalam pemecahan masalah kehidupan (Misel, 2016) (Dewimarni, 2017). Pentingnya matematika dalam pembelajaran mulai dari jenjang sekolah dasar sampai perguruan tinggi yang berfungsi dalam mengembangkan daya nalar kemampuan berpikir

(Afifah, 2012; Rasyid, 2017; Somawati, 2018). Konsep-konsep dalam matematika yang abstrak tersusun berjenjang dan berurutan masih diperlukan pembuktian-pembuktian khusus, sehingga dalam mempelajari matematika konsep sebelumnya harus dikuasai karena merupakan prasyarat untuk melanjutkan konsep berikutnya (Misel, 2016). Pembuktian merupakan hal yang sering dilakukan dalam bidang matematika. Pada umumnya masih banyak yang belum mengetahui cara yang digunakan untuk melakukan pembuktian dalam matematika. Berbicara tentang bukti matematika, terkadang kita temui berbagai kalangan, umumnya siswa dan mahasiswa yang cenderung berpikir bahwa bukti tidak begitu penting di dalam mempelajari matematika (Sabri, 2003). Pada tahap awal pembuktian matematika bukanlah sesuatu yang mudah. Kejadian inilah yang menjadikan seseorang malas untuk memahami bukti dalam matematika (Putri, 2011). Dikalangan pelajar dan mahasiswa bukti adalah alat yang hanya digunakan, oleh matematikawan, untuk menjelaskan pernyataan matematika yang telah diketahui kebenarannya (Sabri,2003:2). Dalam pembuktian matematika terdapat beberapa metode pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan-aturan logika dasar, misalnya bukti langsung, bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, bukti ketunggalan, penyanggahan bukti dengan *counter example*, bukti dengan induksi matematika (Putri, 2011). Adapun bukti yang digunakan dapat berupa bukti formal dan bukti informal.

Bukti formal secara sederhana merupakan langkah pembuktian berdasarkan logika himpunan premis dan aksioma yang pembuktiannya mengikuti aturan inferensi. Lain halnya dengan pembuktian secara informal, yaitu pembuktian dengan kata-kata sehari-hari. Namun pembuktian dalam pembahasan ini dengan tanpa kata-kata hanya menggunakan gambar atau geometri. Pembuktian tersebut merupakan kompetensi pencapaian yang harus pecahkan. Kompetensi tersebut diperlukan agar peserta didik dapat memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi untuk bertahan hidup pada keadaan yang selalu berubah. Maka untuk mencapai hal tersebut disusunlah standar kompetensi dan kompetensi dasar sebagai landasan dalam pembelajaran matematika.

Adapun karakteristik pembuktian informal yang digunakan sebelumnya, belum terdapat penelitian yang menggambarkan penjelasan tentang pembuktian matematika dengan tanpa kata-kata yang hanya menggunakan gambar atau geometri dalam pembelajaran matematika.

METODE PENELITIAN

Jenis dan metode penelitian dengan menggunakan metode penelitian kualitatif, dengan tujuan untuk memperoleh jawaban yang terkait dengan pendapat, tanggapan, persepsi atau uraian kata-kata. Deskriptif penelitian yang dipilih adalah jenis studi pustaka yang merupakan telaah dari literatur. Metode pengumpulan data dengan observasi. Sebagaimana di sampaikan (Nazir, 2003) bahwa teknik pengumpulan data secara studi pustaka teknik simak dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan terkait pembuktian informal dalam pembelajaran matematika. Teknik analisis data dengan menggunakan teknik analisis model Miles and Huberman yaitu, dengan merangkum, menyajikan data, dan memeberikan kesimpulan.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam dunia pendidikan di Indonesia telah diterapkan enam kurikulum, diluar kurikulum 1947 yang masih melanjutkan pendidikan kolonial Belanda. Kurikulum tersebut yaitu kurikulum 1968, kurikulum 1975, kurikulum 1984, kurikulum 1994 ditambah dengan perbaikan GBPP 1999, kurikulum 2004 atau kurikulum berbasis kompetensi, dan terakhir Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan atau KTSP yang dikeluarkan pemerintah melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional nomor 22 tentang Standar isi, nomor 23 tentang Standar Kompetensi Lulusan dan no 24 tentang Pelaksanaan kedua Permen tersebut. Kurikulum 1968 terdapat mata pelajaran berhitung di Sekolah Dasar. Materi Aljabar dan Ilmu Ukur diberikan di Sekolah Menengah Pertama dan Aljabar Analitik, Geometri, Stereometri, Ilmu Ukur Lukis diberikan di Sekolah Menengah Atas. Kurikulum 1975 materi matematika berhitung, aljabar dan ilmu ukur diganti dengan matematika moderen sejalan dengan perkembangan matematika di Amerika Serikat dan Eropa. Dalam kurikulum 1984 dikenalkan Cara Belajar Siswa Aktif (CBSA) dimana siswa yang aktif bukan guru yang aktif. Kurikulum 1994 tidak ada perubahan yang mendasar dalam isi kurikulum matematika SMA, hanya ada penambahan serta pengurangan materi seperti Bilangan Kompleks dihapus dan materi teori Graf ditambahkan. Demikian pula pada kurikulum 2004 dalam mata pelajaran Matematika hanya pemindahan materi tiap semester, tak ada pengulangan materi di semester lain, misalnya trigonometri diberikan di kelas 1 semester 2 dan kelas 2 semester 1 dan pengurangan isi seperti dihapusnya materi irisan kerucut (parabola, ellips dan hiperbola). Kecuali untuk jurusan IPS selama ini tidak ada mata pelajaran Matematika diberikan mata pelajaran Matematika. Demikian pula dengan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan atau KTSP hanya melanjutkan kurikulum 2004. Dilanjutkan dengan ujicoba secara bertahap kurikulum 2013, yang dimulai dari SD kelas 1 dan 4, SMP kelas 7 dan SMA kelas X sampai semua jenjang menggunakan kurikulum 2013 pada tahun 2018. Materi Matematika pada Kurikulum 2013, baik SD, SMP maupun SMA tidak begitu banyak perubahan. Materi matematika di jenjang SMA ditambahkan dengan irisan kerucut, distribusi binomial. Perbedaan kurikulum 2013 dengan kurikulum sebelumnya, pada pendekatan saintifik yaitu mengamati, menanya, mencoba, mengasosiasi, dan mengkomunikasikan.

Integrasi pentingnya bidang ilmu matematika dalam pendidikan. Seharusnya dalam dunia pendidikan, paradigma lama mengenai proses belajar-mengajar yang bersumber pada teori tabula rasa John Locke (Lie, 2010:2). Locke mengatakan bahwa pikiran seorang anak seperti kertas kosong yang bersih dan siap dicoret-coret gurunya. Banyak diantara guru dan dosen dalam melaksanakan kegiatan belajar-mengajar hanya sebatas: memindahkan pengetahuan dari guru ke siswa, mengisi botol kosong dengan pengetahuan, mengotak-ngotakkan siswa, dan memacu siswa dalam kompetisi bagaikan ayam aduan (Lie, 2010). Menurut Piaget dalam Lie (2010) pengetahuan ditemukan, dibentuk, dan dikembangkan oleh siswa. Siswa membangun pengetahuan secara aktif. Maslow dalam Lie (2010) mengemukakan pendidikan adalah interaksi pribadi di antara para siswa dan interaksi antara guru dan siswa. Jerome S Bruner, sebagai seorang ahli psikologi kognitif, memberikan

dorongan agar pendidik memberi perhatian yang besar pada pentingnya pengembangan berpikir. Bruner tidak mengembangkan teori belajar yang sistematis. Dasar pemikiran teorinya memandang bahwa manusia adalah sebagai pemroses, pemikir dan pencipta informasi. Oleh karenanya yang terpenting dalam belajar adalah cara-cara bagaimana seseorang memilih, mempertahankan, dan mentransformasi informasi yang diterimanya secara aktif. Menurut Bruner pada dasarnya belajar merupakan proses kognitif yang terjadi pada diri seseorang. Ada tiga proses kognitif yang terjadi dalam belajar, yaitu

1. Proses perolehan informasi baru,
2. Proses mentransformasikan informasi yang diterima, dan
3. Menguji relevansi dan ketepatan pengetahuan.

Perspektif konstruktivisme berakar dari filsafat tertentu tentang manusia dan pengetahuan. Perhatian penting konstruktivisme pada makna pengetahuan, sifat-sifat pengetahuan dan bagaimana seseorang menjadi mengerti dan berpengetahuan. Konstruktivisme adalah landasan berpikir pembelajaran kontekstual yang menyatakan bahwa pengetahuan dibangun oleh manusia sedikit demi sedikit, yang hasilnya diperluas menjadi konteks yang terbatas (sempit) dan tidak sekonyong konyong. Esensi dari teori konstruktivisme adalah ide bahwa siswa harus menemukan dan mentransformasikan suatu informasi kompleks ke situasi lain, dan apabila dikehendaki informasi itu menjadi milik mereka sendiri. Dalam konstruktivisme pembelajaran harus dikemas menjadi proses “mengkonstruksi” bukan “menerima” pengetahuan. Dalam proses pembelajaran siswa membangun sendiri pengetahuannya melalui keterlibatan aktif dalam setiap proses belajar mengajar. Siswa menjadi pusat pembelajaran bukan guru. Dalam konstruktivisme strategi memperoleh lebih diutamakan daripada seberapa banyak pengetahuan yang diperoleh dan diingat oleh siswa. Disamping itu, ada pula perkembangan yang terjadi di Belanda, tepatnya di Institut Freudenthal, dimana sejak tahun 1971 mengembangkan suatu pendekatan teoritis terhadap pembelajaran matematika yang dikenal dengan *realistic mathematics education* (RME). RME menggabungkan pandangan tentang apa itu matematika, bagaimana siswa belajar matematika, dan bagaimana matematika harus diajarkan. Freudenthal berkeyakinan bahwa siswa tidak boleh dipandang sebagai siswa pasif, melainkan siswa harus menemukan kembali matematika dengan cara mereka sendiri di bawah bimbingan orang dewasa, dalam hal sekolah adalah guru. Proses penemuan kembali tersebut harus dikembangkan melalui penjelajahan berbagai persoalan dunia *real*.

Treffers membedakan dua macam matematisasi, yaitu vertikal dan horizontal. Dalam matematisasi horizontal, siswamulai dari soal-soal kontekstual, mencoba menguraikan dengan bahasa dan simbol yang dibuat sendiri, kemudian menyelesaikan soal tersebut. Dalam proses ini setiap siswa dapat mengerjakan dengan caranya sendiri, sehingga setiap siswa dapat berbeda cara. Dalam matematisasi vertikal, guru mulai dengan soal-soal kontekstual, tetapi dalam jangka panjang kita dapat menyusun prosedur tertentu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal sejenis secara langsung, tanpa menggunakan bantuan konteks. Kedua komponen matematisasi horizontal dan vertikal tidak terdapat dalam matematisasi mekanistik, empiristik maupun strukturalistik. Dengan demikian, mengawali suatu proses pembelajaran matematika yang mengutamakan aspek konstruktivisme di kelas sesungguhnya guru sudah mempersiapkan tugas serta aktifitas belajar siswa dan mengantisipasi setiap respons dan pertanyaan yang mungkin dikemukakan siswa. Hal ini akan lebih terasa dan nampak jelas

ketika terhadap suatu konsep matematika yang akan diajarkan di kelas, proses pembelajaran diawali dengan menyajikan suatu situasi masalah yang bermakna bagi siswa, atau situasi yang kontekstual bagi siswa. Dengan demikian siswa akan berkesempatan untuk memberdayakan kemampuan serta pengalaman yang dimilikinya. Dengan mempertimbangkan bahwa kemampuan matematika siswa berada pada level yang beragam, soal-soal yang disajikan ketika guru mengawali suatu kegiatan belajar hendaknya dapat mengakomodasi keberagaman level pengetahuan siswa dan membuka peluang untuk mereka berpartisipasi dalam mengkonstruksi pengetahuan mereka. Demikian juga dengan mempertimbangkan bahwa konsep matematika adalah sesuatu (pengetahuan) yang abstrak dan untuk menuju pada keabstrakan tersebut pembelajar harus berpijak pada sesuatu (pengetahuan) yang konkrit yang dimilikinya. Pemanfaatan terhadap pengetahuan yang dimiliki siswa sesungguhnya membuka kesempatan kepada mereka untuk berperan aktif dalam kegiatan belajar, apakah bertanya, mengemukakan pendapat atau bekerja sama dengan temannya dalam kelompok belajar. Dengan kata lain pembelajaran matematika dikelas janganlah didominasi oleh guru, tetapi melibatkan siswa secara aktif.

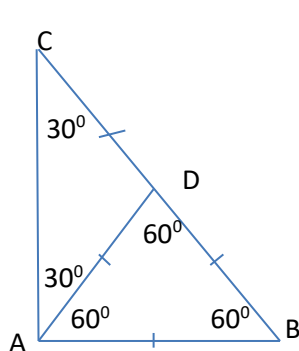
Bukti Informal dalam pembelajaran, baik konstruktivisme, RME, maupun kurikulum 2013, guru dituntut untuk membuat siswa mengkonstruksikan hasil belajarnya sendiri, maka diperlukan media informal sebelum menjadi formal. Selama ini dalam pembelajaran di sekolah pada umumnya guru langsung memberikan rumus formal dan contoh soal, kemudian siswa mengerjakan soal latihan, tanpa siswa tersebut kreatif dan aktif. Media informal tersebut dapat berupa model ataupun bukti tanpa kata-kata (*Proof Without Word*). Baeti dalam Putri (2011:1) menyatakan pernyataan-pernyataan matematika seperti definisi, teorema dan pernyataan lainnya pada umumnya berbentuk kalimat logika, dapat berupa implikasi, biimplikasi, negasi atau berupa kalimat berkuantor. Operator logika seperti konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi juga sering termuat dalam suatu pernyataan matematika. Jadi membuktikan kebenaran suatu teorema tidak lain adalah membuktikan kebenaran suatu kalimat logika. Berbicara tentang bukti matematika, terkadang kita temui berbagai kalangan, umumnya siswa dan mahasiswa, yang cenderung berpikir bahwa bukti tidak begitu penting di dalam mempelajari matematika (Sabri, 2003). Pada tahap awal pembuktian matematika bukanlah sesuatu yang mudah. Kejadian inilah yang menjadikan seseorang malas untuk memahami bukti dalam matematika (Putri, 2011). Dikalangan pelajar dan mahasiswa bukti adalah alat yang hanya digunakan, oleh matematikawan, untuk menjelaskan pernyataan matematika yang telah diketahui kebenarannya (Sabri, 2003). Dalam pembuktian matematika terdapat beberapa metode pembuktian sederhana dengan menggunakan aturan-aturan logika dasar, misalnya bukti langsung, bukti tak langsung, bukti dengan kontradiksi, bukti ketunggalan, penyanggahan bukti dengan *counter example*, bukti dengan induksi matematika (Putri, 2011). Dalam artikel *making mathematics* yang berjudul *Proof*, paling tidak terdapat enam motivasi mengapa orang membuktikan. Enam motivasi tersebut adalah *to establish a fact with certainty, to gain understanding, to communicate an idea to others, for the challenge, to create something beautiful, to construct a large mathematical theory. To*

establish a fact with certainty merupakan motivasi paling dasar mengapa orang perlu membuktikan suatu pernyataan matematika, yaitu untuk meyakinkan bahwa apa yang selama ini dianggap benar adalah memang benar. Kita hanya menggunakan fakta tersebut karena sudah tertulis dalam buku teks atau sudah disampaikan guru. Jika suatu bukti tidak hanya membuktikan suatu fakta, tetapi juga memberikan penjelasan tentang fakta tersebut, maka pembuktian berfungsi sebagai pemahaman (*gain understanding*). Disamping itu pembuktian menunjukkan sebagai komunikasi sebuah ide ke orang lain, serta sebagai tantangan. Bagi para ahli matematika, keindahan sesungguhnya dari matematika terletak pada pola penalaran yang berupa interkoneksi argumen-argumen logis.

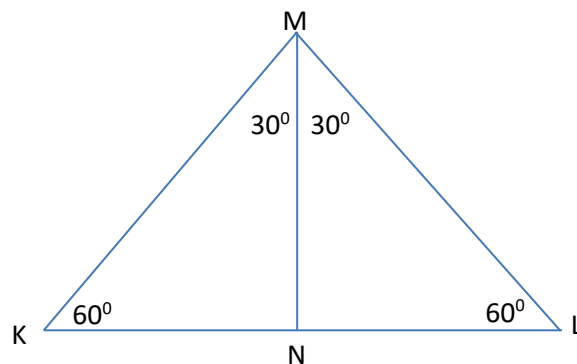
Representasi matematika adalah suatu aspek yang selalu hadir dalam pembelajaran matematika. Representasi yang disajikan dalam bentuk yang sudah jadi seperti rumus baku sesungguhnya dipandang telah mengurangkan atau meniadakan kesempatan bagi siswa untuk berpikir kreatif dan menemukan kembali konsep tersebut. Representasi atau model tersebut dapat muncul dalam bentuk nyata. Selain bukti formal yang sudah disebutkan, terdapat pula metode pembuktian yang jarang dijumpai dalam pembelajaran matematika yaitu bukti tanpa kata. *Proof Without Word* (Bukti Tanpa Kata) muncul sejak 1990-an dalam majalah *Mathematics Magazine* terbitan *Mathematical Association of America (MAA)*, dan berlanjut sampai sekarang. Sekarang ini *Proof Without Word* tampil juga pada jurnal ilmu komputer *Teacing Mathematics and Computer*. Di Indonesia pun pernah muncul Bukti tanpa kata di majalah *Idea* terbitan Fakultas Pendidikan Matematika Universitas Sanatha Dharma Yogyakarta.

Berikut ini disajikan beberapa contoh-contoh model dan *Proof Without Words*. Contoh-contoh model dan *Proof Without Words* meliputi:

1. Pada sembarang segitiga siku-siku, sisi di depan sudut 30° panjangnya setengah panjang sisi miring



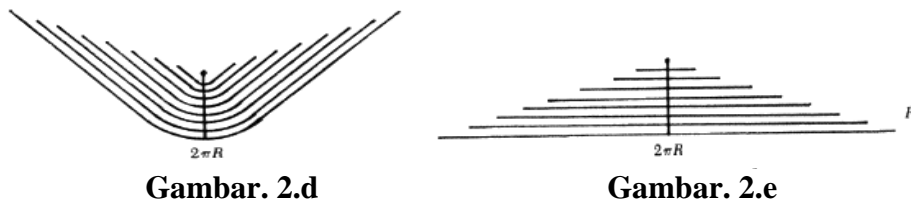
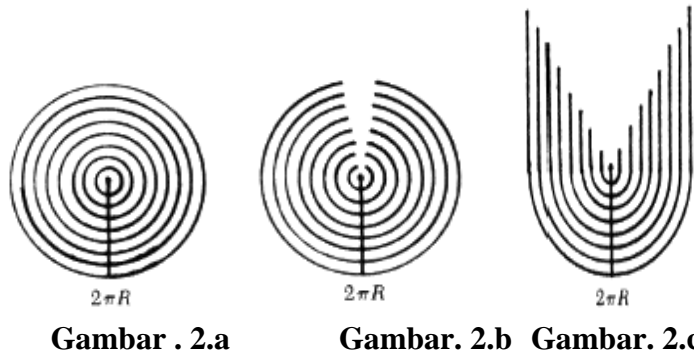
Gambar. 1.a



Gambar. 1.b

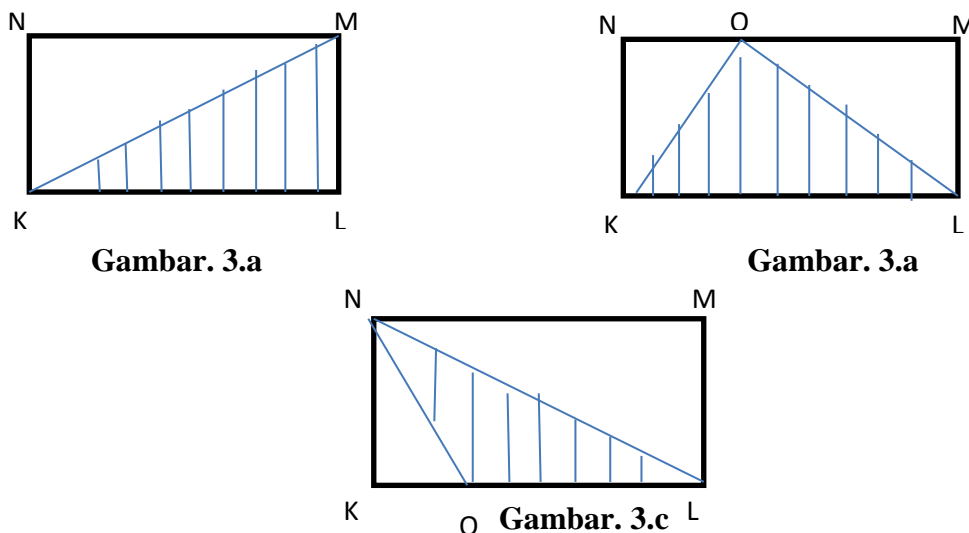
Pada Gambar. 1.a dibuat segitiga siku-siku $30^\circ-60^\circ-90^\circ$, pada sisi BC, titik D merupakan titik tengah. Segitiga ABD merupakan segitiga samasisi, $AB = BD = AD = CD = \frac{1}{2} BC$. Terbuktilah bahwa pada sembarang segitiga siku-siku, sisi di depan sudut 30° panjangnya setengah panjang sisi miring. Pada Gambar. 1.b dibuat segitiga samasisi KLM, dan garis tinggi MN, dimana panjang KN setengah dari KL. Karena segitiga samasisi, maka ketiga sisinya sama panjang. Terbuktilah bahwa pada sembarang segitiga siku-siku, sisi di depan sudut 30° panjangnya setengah panjang sisi miring.

2. Luas daerah lingkaran



Pertama digambarkan lingkaran dengan jari-jari R seperti pada Gambar. a. Kemudian direntangkan dengan pusat perentangan adalah pusat lingkaran seperti gambar b dan c, berlanjut seperti Gambar. d. Pada akhirnya terbentuk gambar e, berupa segitiga. Tingginya berupa R dan alasnya $2\pi R$, sehingga luas segitiga $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Hasil ini merupakan luas lingkaran dengan jari-jari R .

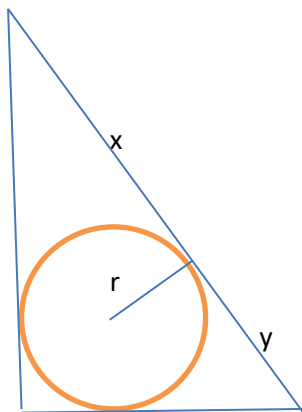
3. Luas daerah segitiga



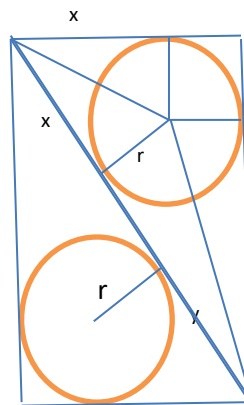
Untuk menentukan luas segitiga, siku-siku (gambar 3.a), dibuat segiempat dengan menarik diagonal KM . Segitiga sembarang (gambar 3.b), dibuat garis KO dan LO dan segitiga tumpul (gambar 3.c), dibuat garis NO dan NL .

4. Luas daerah Segitiga siku-siku

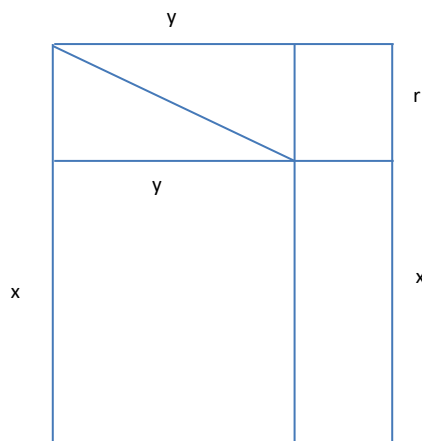
Teorema: “Luas daerah segitiga siku-siku sama dengan hasil kali dari panjang segmen-segmen sisi miring yang dibagi oleh titik singgung lingkaran dalam segitiga siku-siku”. Pertama digambarkan segitiga siku-siku dengan lingkaran dalam membagi sisi miring menjadi x dan y seperti pada Gambar. 4.a. Kemudian dibuat gambar yang sama dan diletakkan dengan sisi miring berimpit, membentuk persegi panjang, seperti terlihat pada Gambar. 4.b. Kemudian dari pusat lingkaran dalam dihubungkan ke titik sudut segitiga. Sesudah itu, bagian-bagian dari segitiga siku-siku bagian atas disusun seperti Gambar. 4.c. membentuk persegi panjang. Bagian persegi panjang yang luasnya xy merupakan luas segitiga.



Gambar. 4.a



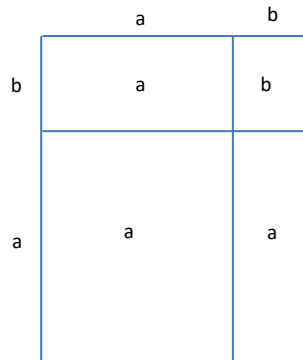
Gambar. 4.b



Gambar. 4.c

5. $(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$

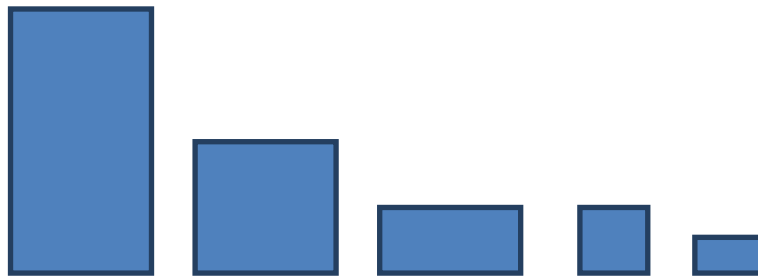
Pertama dibuat atau digambarkan persegi dengan ukuran a , kemudian diperluas menjadi persegi dengan memperpanjang sisi a semula dengan b satuan seperti pada Gambar 5.



Gambar. 5

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

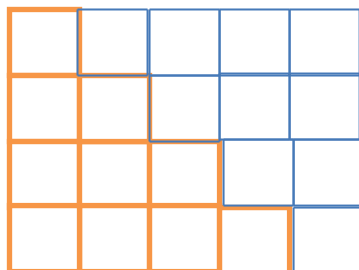
Untuk peragaan ini dapat menggunakan kertas atau bahan lain. Kertas dibagi dua sama besar kemudian satu bagian dibagi dua sama besar lagi, lalu satu bagian dibagi dua sama besar demikian seterusnya. Setelah itu potongan-potongan kita susun kembali sehingga membentuk lembar kertas semula.



Gambar. 6

7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$

Buatlah 1 kotak kemudian tambahkan 1 kotak sehingga membentuk persegi panjang. Untuk $1 + 2$ kita buat 3 kotak yang disusun dalam 2 baris, 1 di baris atas dan 2 di baris ke dua, lalu dibuat suatu persegi panjang ukuran 2×3 . Untuk $1 + 2 + 3$ kita buat 6 buah kotak yang disusun dalam 3 baris, demikian seterusnya.



Gambar. 7

Dari gambar 7 dapat dilihat bahwa $1 + 2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$;

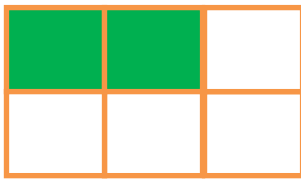
$$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5.$$

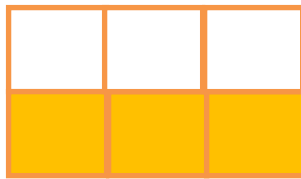
$$\text{Sehingga } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n+1)$$

8. Penjumlahan Pecahan $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

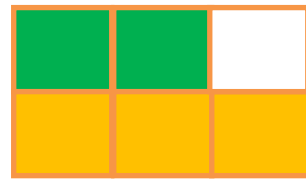
Kita buat 2 persegi panjang masing-masing dibuat 6 kotak, kemudian satu persegi panjang dibuat untuk menunjukkan $\frac{1}{3}$ dengan mewarnai hijau kemudian satunya lagi untuk menunjukkan $\frac{1}{2}$ dengan diwarnai orange. Lalu, digabungkan sehingga menjadi $\frac{5}{6}$ seperti Gambar. 8.c



Gambar. 8.a

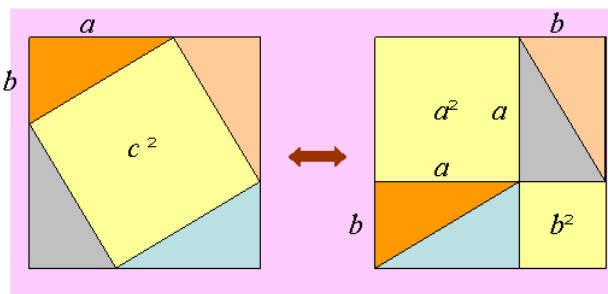


Gambar. 8.b



Gambar. 8.c

9. Teorema Phytagoras

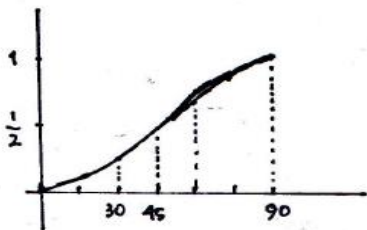


Gambar. 9

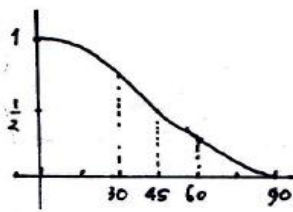
Gambar kiri disusun seperti gambar kanan, sehingga warna kuning pada gambar kiri sama dengan jumlah gambar warna kuning sebelah kanann.

10. Trigonometri

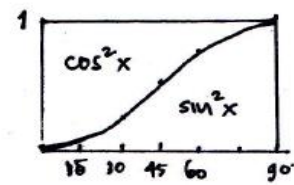
Dalam trigonometri, terdapat teorema dasar $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Pertama kita gambar kurva $\sin^2 x$ dan $\cos^2 x$ seperti gambar a dan b, kemudian kita gabungkan diperoleh seperti pada gambar c berikut.



Gambar. 10.a
10.c



Gambar. 10.b.



Gambar.

SIMPULAN DAN SARAN

Jika selama ini dalam pembelajaran di kelas para guru memberikan rumus formal secara langsung tanpa membuat siswa aktif, berpikir dan menemukan sendiri, maka sudah saatnya berpaling ke pembelajaran yang menuntut siswa aktif berpikir dan menemukan sendiri pengetahuannya. Pembuktian teorema-teorema yang sederhana, mulai dengan informal berupa gambar, kemudian baru dilanjutkan secara formal. Memang tidak semua teorema dapat dibuktikan dengan tanpa kata, misalnya integral tak tentu atau teorema yang tidak memuat numerik. Adapun untuk penelitian dengan pembuktian dengan metode lain dalam pembelajaran matematika. Semoga penelitian ini dapat bermanfaat dan menjadi sumber rujukan ataupun referensi penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Afifah, D. S. (2012). Interaksi Belajar Matematika Siswa Dalam Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD. *Pedagogia*, 1 (2), 145-151.
- Dewimarni, S. (2017). Kemampuan Komunikasi dan Pemahaman Konsepn ALjabar Linear Mahasiswa UNiversitas Indonesia 'YPTK' Padang. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 8 (1), 53-62.
- Hadi, Sutarto.(2005).*Pendidikan Matematika Realistik*. Banjarmasin: Penerbit Tulip.
- Lie, Anita. (2010). *Cooperative Learning*. Jakarta: Grasindo.
- Kunandar.(2007) *Guru Profesional*. Jakarta: Raja Grafindo Perkasa.
- Masykur, R. N. (2017). Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Dengan Macromedia Flash. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 8 (2).
- Misel, E. S. (2016). Penerapan Pendekatan Matematika Realistik Untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi Matematis Siswa. *Metoda Didaktik*, 10 (2), 27-36.
- Nelsen, Roger, B. (2007). *Mathematics Magazine vol 80, no 1, February 2007, Proof Without Works, The Area of a Right Triangle*, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Putri, Prahetsy Two Era.(2011). *Penerapan Bukti Tanpa Kata Pada Bidang Matematika*. Universitas Negeri Semarang. Skripsi. Tidak diterbitkan.
- Rasyid, M. A. (2017). Profil Berpikir Reflektif Siswa SMP dalam Pemecahan Masalah Pecahan Ditinjau dari Perbedaan Gender. *KREANO: Jurnal Matematika Kreatif Inovatif*, 8 (2), 171-181.
- Setiani, F. (2011). Pengembangan Asesmen Alternatif Dalam Pembelajaran Matematika Dengan Pendekatan Realistik Di Sekolah Dasar. *Jurnal Penelitian dan Evaluasi Pendidikan*, 15 (2), 250-268.

- Sabri. (2003). *Bukti Dalam Belajar Mengajar Matematika*. Di download tanggal 14 April 2017. [http.digilib.unm.ac.id](http://digilib.unm.ac.id).
- Somawati. (2018). Peran Efikasi Diri (Self Efficacy) Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika. *Jurnal Konseling dan Pendidikan* , 6 (1), 39-45.
- Suparno, Paul.(1997).*Filsafat Konstruktivisme*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.
- Winataputra, Udin, S. (2007). *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta :Penerbit Universitas Terbuka