

PENERAPAN SEBARAN *GENERALIZED EXTREME VALUE* (GEV) UNTUK MENDUGA KEJADIAN EKSTRIM

Achi Rinaldi¹

¹Departemen Matematika Universitas Islam Negeri Raden Intan Lampung

Jl. Letkol Endro Suratmin, Sukarame, Bandar Lampung 35131

Email : achirinaldi@radenintan.ac.id

Abstract

The Generalized Extreme Value (GEV) is a distribution that can describe extreme values. Modeling for extreme values is very useful in estimating extreme events, such as extreme rainfall that can cause flooding. This study aims to make extreme rainfall models through the spatial effect that succeed in forming special zones. In addition, it is also studied on time series patterns that can be explained through extremogram. The effect of spatial and time series are then modeled spatiotemporally by the Bayes hierarchy method through the concept of Integrated Laplace Approximation (INLA). The application of models for extreme values with GEV is expected to be a reference for policymakers, especially in the context of disaster mitigation due to extreme events.

Keywords: Hierarchical Bayes, GEV, extreme event, INLA, spatio-temporal

Abstrak

Sebaran Generalized Extreme Value (GEV) merupakan sebaran yang dapat menggambarkan nilai ekstrim. Pemodelan untuk nilai ekstrim sangat berguna menduga kejadian ekstrim, seperti curah hujan ekstrim yang dapat menyebabkan banjir. Penelitian ini memodelkan curah hujan ekstrim melalui model spasial yang berhasil membentuk zona khusus. Selain faktor spasial juga dikaji mengenai pola deret waktu yang dapat dijelaskan melalui extremogram. Hasil pembentukan zona dan pola deret waktu kemudian dimodelkan secara spatio-temporal dengan metode Bayes hirarki melalui konsep *Integrated laplace Approximation* (INLA). Penerapan model untuk nilai ekstrim melalui sebaran GEV diharapkan dapat menjadi rujukan bagi pemangku kebijakan khususnya dalam rangka mitigasi bencana akibat kejadian ekstrim.

Kata kunci: Bayes hirarki, GEV, kejadian ekstrim, INLA, spatio-temporal

PENDAHULUAN

Kejadian ekstrim identik dihubungkan dengan suatu kejadian yang bersifat merusak atau merugikan kehidupan manusia, contohnya: tsunami, banjir, gelombang panas, hujan badai, dan gempa bumi. Fenomena kejadian ekstrim biasanya memiliki sifat yang kompleks, sulit diprediksi, dan memiliki intensitas yang tidak teratur. Salah satu pendekatan yang digunakan untuk menduga kejadian ekstrim adalah dengan sebaran *Generalized Extreme Value* (GEV). Meskipun memiliki ketepatan pendugaan yang baik, metode ini membutuhkan data yang cukup banyak (Rinaldi *et al.* 2018).

Penerapan sebaran GEV untuk pendugaan nilai ekstrim telah dilakukan khususnya tentang curah hujan. Rinaldi (2016) menggunakan sebaran GEV untuk menduga curah hujan ekstrim di wilayah Jakarta. Konsep pendugaan nilai ekstrim dikembangkan dengan memodelkan secara spasial hingga terbentuk suatu zona khusus curah hujan ekstrim di Jawa Barat (Rinaldi *et al.* 2017).

Selanjutnya penelitian berkembang ke arah pola curah hujan ekstrim dari waktu ke waktu melalui konsep extremogram (Rinaldi 2018). Penelitian-penelitian tersebut hanya memodelkan secara terpisah unsur spasial dan waktu, sehingga Rinaldi (2018) mengembangkan model spatio-temporal untuk menduga curah hujan ekstrim dengan menggabungkan unsur spasial berupa zona yang telah terbentuk dengan pola deret waktu yang telah diteliti sebelumnya.

KAJIAN LITERATUR

Sebaran GEV

Misal Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah variabel yang saling bebas dan memiliki fungsi sebaran identik $F(y)$, sedangkan $M_n = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$. Jika terdapat konstanta $a_n > 0$, dan b_n maka:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) = G(z),$$

dengan G adalah fungsi dari tiga sebaran dasar nilai ekstrim. Ketiga bentuk sebaran yang dimaksud adalah sebaran Gumbel, sebaran Frechet, dan sebaran Weibull, dengan persamaan masing-masing:

$$\text{Gumbel: } G(z) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]\right\}; -\infty < z < \infty$$

$$\text{Frechet: } G(z) = \begin{cases} 0 & ; z \leq a \\ \exp\left\{-\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\alpha}\right\} & ; z > a \end{cases}$$

$$\text{Weibull: } G(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[-\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]^\alpha\right\} & ; z < a \\ 1 & ; z \geq a \end{cases}$$

dengan $a > 0$ adalah parameter skala, b adalah parameter lokasi dan α adalah parameter bentuk.

Ketiga sebaran ini memiliki bentuk ujung sebaran yang berbeda, ujung sebaran dari ketiga sebaran memberikan gambaran yang berbeda untuk perilaku nilai ekstrim, sehingga sulit untuk menentukan secara tepat pola sebaran dari nilai ekstrim. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan menggabungkan ketiga tipe sebaran ke dalam sebaran *Generalized Extreme Value* (GEV) sebagai berikut:

$$G(z) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1 + \xi \frac{z-\mu}{\sigma}\right)_+^{-1/\xi}\right\}, & \xi \neq 0 \\ \exp\left\{-\exp\left(-\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right\}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan μ adalah parameter lokasi, $\sigma > 0$ adalah parameter skala, sedangkan ξ adalah parameter bentuk. Adapun ξ merupakan parameter yang menentukan karakteristik ujung sebaran, jika $\xi < 0$ maka fungsi peluangnya mempunyai suatu titik ujung kanan yang terhingga dan jika $\xi \geq 0$ maka fungsi peluangnya akan mempunyai titik ujung kanan yang tak

terhingga. Bentuk sebaran GEV akan mengarah pada sebaran Gumbel untuk limit $\xi \rightarrow 0$, sebaran Frechet jika $\xi > 0$, dan untuk sebaran Weibull jika $\xi < 0$.

Madogram

Ukuran dependensi spasial antar titik contoh dapat ditunjukkan oleh semivarian yang besarnya bergantung pada jarak antar titik. Jarak titik contoh yang kecil akan menghasilkan semivarian yang kecil dan semakin besar jarak antar titik contoh akan menghasilkan semivarian yang semakin besar. Konsep jarak yang digunakan adalah jarak Euclid. Plot semivarian sebagai fungsi jarak disebut semivariogram. Metode ini berfungsi untuk mendeskripsikan keragaman antar lokasi pada data spasial. Semivariogram dapat didefinisikan oleh persamaan berikut:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E(Z(y+h) - Z(y))^2 \quad (2.2)$$

dengan $\gamma(h)$ adalah nilai *semivariogram* untuk setiap jarak h dan $Z(y+h) - Z(y)$ adalah selisih nilai peubah, misalnya curah hujan dari dua lokasi yang berjarak h . Sebelum menentukan model *semivariogram*, perlu dilakukan pendugaan terhadap parameter-parameter *semivariogram*. Parameter tersebut diduga berdasarkan plot *semivariogram* yang dihasilkan.

Semivariogram hanya bisa digunakan untuk sebaran ekor pendek (*light tail*) sehingga tidak bisa digunakan untuk data ekstrim. Untuk mengatasi hal itu, Cooley *et al.* (2006) menggunakan *semivariogram* orde pertama yang disebut *madogram* yang bisa digunakan untuk data ekstrim. *Madogram* didefinisikan sebagai berikut:

$$v(h) = \frac{1}{2}E|Z(y+h) - Z(y)|. \quad (2.3)$$

Madogram mengharuskan momen pertama terhingga yang tidak selalu terjadi pada kasus ekstrim. Untuk mengatasinya digunakan *F-Madogram* yang mentransformasi peubah acak dengan menggunakan fungsi sebaran nilai ekstrim. Jika $Z(x)$ merupakan proses *max-stable* yang stasioner dan isotropik dengan fungsi sebaran G (sebaran GEV), maka *F-madogram*nya adalah sebagai berikut:

$$v_F(h) = \frac{1}{2}E|G(Z(y+h)) - G(Z(y))|. \quad (2.4)$$

Pola *semivariogram* ditentukan dengan proses yang terkadang melibatkan banyak titik pada plot *semivariogram* sehingga sangat sulit untuk melihat pola tertentu. Hal tersebut dapat diatasi dengan mengelompokkan *madogram* berdasarkan kesamaan jarak, sehingga perhitungan *F-madogram* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{v}_F(h) = (2|N(h)|)^{-1} \sum_{i=1}^{N(h)} |G(Z(y_i+h)) - G(Z(y_i))| \quad (2.5)$$

dengan $\hat{v}_F(h)$ adalah *F-madogram* pada *lag-h*, y_i adalah lokasi titik contoh, $Z(y_i)$ adalah nilai pengamatan pada lokasi y_i , h adalah jarak antara dua lokasi, (y_i, y_i+h) adalah pasangan data yang berjarak h , dan $N(h)$ adalah banyaknya pasangan lokasi yang berjarak h . Hubungan antara *F-madogram* dan koefisien ekstremal(θ), yang juga merupakan ukuran dependensi ekstrim, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\theta(h) = (1 + 2v_F(h))(1 - 2v_F(h))^{-1}. \quad (2.6)$$

Pendugaan Parameter Spasial Ekstrim

Model spasial ekstrim dapat dijabarkan ke dalam bentuk (Davison *et al.* 2012):

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 lon_i + \beta_2 lat_i \quad (2.7)$$

$$\sigma_i = \beta_0 + \beta_1 lon_i + \beta_2 lat_i \quad (2.8)$$

dengan lon_i adalah longitude dan lat_i adalah latitude dari stasiun hujan ke- i . Pendugaan parameter ξ diasumsikan konstan karena sangat sulit untuk dilakukan (Cooley *et al.* 2007).

Pendugaan parameter spasial ekstrim menggunakan metode copula melalui metode *pseudo maximum likelihood estimation* (PMLE). Metode ini mentransformasikan data asli ke dalam pengamatan semu yang kemudian dilanjutkan dengan penduga kemungkinan maksimum. Misalkan X_{ij} adalah contoh acak berdimensi d , $i = 1, \dots, n$ dan $j = 1, \dots, d$. Dengan menggunakan fungsi sebaran G dari pengamatan semu $\mathbb{U} = U_{ij}$, yaitu:

$$U_{ij} = \frac{n}{n+1} G_j(X_{ij}).$$

PMLE $\hat{\theta}_n^{PML}$ dihitung melalui pengamatan semu \mathbb{U} dengan memaksimumkan:

$$\ell_{\mathbb{U}}(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c(U_{i1}, \dots, U_{id} | \theta)$$

dengan $\theta = (\mu, \sigma, \xi)$ adalah vektor dari parameter copula, dan c adalah fungsi peluang dari parameter θ yang diberikan oleh:

$$c(u_1, \dots, u_d | \theta) = \frac{\partial \mathbb{C}(u_1, \dots, u_d | \theta)}{(u_1, \dots, u_d)}, \quad u_1, \dots, u_d \in [0, 1].$$

PMLE diberikan oleh:

$$\hat{\theta}_n^{PML}(\mathbb{U}) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell_{\mathbb{U}}(\theta).$$

Regresi Pemulusan Spline

Model aditif merupakan model regresi yang dikenal lebih fleksibel dibandingkan dengan regresi berganda. Model aditif untuk sebaran keluarga eksponensial merupakan model *Generalized Additive Model* (GAM). Bentuk persamaan GAM dapat ditulis sebagai:

$$g[\mu(X)] = f_1(X_1) + \dots + f_p(X_p) \quad (2.9)$$

dengan $X_i, i = 1, \dots, p$ sebagai peubah penjelas, g sebagai fungsi penghubung, f_j fungsi pemulusan dimana $j = 1, \dots, p$. Fungsi penghubung yang digunakan selaras dengan fungsi penghubung *Generalized Linear Model* (GLM). Contoh fungsi penghubung untuk g adalah $g(\mu) = \mu$ dikenal sebagai penghubung identitas yang penggunaannya pada model aditif untuk peubah respon menyebar Normal, sedangkan $g(\mu) = \log(\mu)$ digunakan pada model log-aditif untuk data yang menyebar Poisson. Secara umum antar peubah yang memiliki hubungan secara harfiah dapat dimodelkan (Rinaldi 2015).

Peubah respon yang digunakan dalam model ini adalah penduga parameter lokasi dan penduga parameter skala dengan peubah penjelasnya koordinat Bujur (*Longitude*) dan Lintang (*Latitude*), sehingga persamaan menjadi:

$$\hat{\mu}_i = f_1(lon_i) + f_2(lat_i) + f_3(lon_i, lat_i). \quad (2.10)$$

Fungsi pemulusan $f_1, f_2,$ dan f_3 yang dipakai dalam kajian ini adalah pemulusan spline yang dinotasikan sebagai: $f = \mathbf{X}\beta^* + \mathbf{Z}\mathbf{u}$,

dengan $\beta^* = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ dan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_K)$ adalah vektor parameter, $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$

dan $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (x_1 - \kappa_1) & \dots & (x_1 - \kappa_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n - \kappa_1) & \dots & (x_n - \kappa_K) \end{bmatrix}$ adalah matriks desain, $\kappa_1 < \dots < \kappa_K$ adalah simpul tetap.

Sedangkan $\hat{\mu}_i$ merupakan penduga parameter lokasi ekstrim yang terlebih dahulu diduga dengan metode copula.

Extremogram

Misalkan \mathbf{X}_t vektor acak yang memiliki sifat stasioner yang berada di ruang \mathbb{R}^d , serta diketahui himpunan Borel A dan B dalam \mathbb{R}^d sedemikian hingga $C = A \times \mathbb{R}^{d(h-1)} \times B$ nilainya terbatas dan menjauhi nol, maka *extremogram* didefinisikan untuk dua himpunan A dan B sebagai:

$$\rho_{A,B}(h) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x^{-1}X_h \in B | x^{-1}X_0 \in A), h = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

jika limitnya ada. Karena himpunan A dan B nilainya terbatas dan menjauhi nol, maka kejadian $\{x^{-1}X_0 \in A\}$ dan $\{x^{-1}X_h \in B\}$ menjadi kejadian ekstrim yang ditandai dengan nilai peluang yang konvergen menuju 0 ketika $x \rightarrow \infty$. Nilai h merupakan nilai dari lag waktu. Untuk melakukan pendugaan *extremogram*, limit dari x diganti dengan a_m yang didefinisikan sebagai kuantil $(1 - 1/m)$ dari peubah X_t yang stasioner, untuk penelitian ini digunakan kuantil 95. Penduga *extremogram* setelah X_1, X_2, \dots, X_n diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\hat{\rho}_{A,B}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} I_{\{a_m^{-1}X_{t+h} \in B, a_m^{-1}X_t \in A\}}}{\sum_{t=1}^n I_{\{a_m^{-1}X_t \in A\}}}$$

$\hat{\rho}_{A,B}(h)$ mengikuti sebaran normal asimtotik yang telah dibuktikan dalam Davis dan Mikosch (2009) yaitu:

$$\sqrt{n/m} (\hat{\rho}_{A,B}(h) - \rho_{A,B:m}(h)) \rightarrow N(0, \sigma_{A,B}^2(h))$$

sedangkan $\rho_{A,B:m}(h)$ dapat dijabarkan sebagai:

$$\rho_{A,B:m}(h) = P(a_m^{-1}X_h \in B | a_m^{-1}X_0 \in A) = \frac{P(a_m^{-1}X_0 \in A, a_m^{-1}X_h \in B)}{P(a_m^{-1}X_0 \in A)}.$$

Secara sederhana bisa dikatakan bahwa konsep *extremogram* adalah menduga peluang terjadinya kejadian esktrim dalam waktu $(t + h)$ dengan syarat ada kejadian ekstrim pada periode t . *Extremogram* merupakan metode yang hanya dapat mengukur dependensi ekstrim untuk satu peubah runtun waktu saja. Para peneliti biasanya ingin melihat sejauh mana satu peubah dapat mempengaruhi

peubah runtun waktu lainnya. Jika asumsi sebaran normal yang digunakan maka CCF merupakan alat yang tepat, sedangkan *cross-extremogram* adalah metode yang tepat untuk melihat dependensi ekstrim runtun waktu peubah ganda dua. *Cross-extremogram* didefinisikan sebagai:

$$\rho_{A,B}(h) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x^{-1}Y_h \in B | x^{-1}X_0 \in A), h = 0, 1, 2, \dots,$$

sedangkan penduga *cross-extremogram* dapat dijabarkan sebagai:

$$\hat{\rho}_{A,B}(h) = \frac{\sum_{t=1}^{n-h} I_{\{a_m^{-1}Y_{t+h} \in B, a_m^{-1}X_t \in A\}}}{\sum_{t=1}^n I_{\{a_m^{-1}X_t \in A\}}}$$

a_m didefinisikan sebagai kuantil $(1 - 1/m)$ dari peubah X_t dan Y_t yang merupakan peubah runtun waktu.

Model Spatio-Temporal untuk Nilai Ekstrim

Pengembangan model spatio-temporal yang digunakan untuk peubah dengan sebaran GEV, model-model yang digunakan dalam penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

A. Model tanpa peubah penjelas

1. Model dengan tren waktu linier

$$\eta_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t \quad (2.12)$$

2. Model aditif tanpa interaksi

$$\eta_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t \quad (2.13)$$

3. Model aditif dengan interaksi

$$\eta_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it} \quad (2.14)$$

B. Model dengan peubah penjelas

Peubah penjelas yang digunakan adalah $x_1 = longitude$, $x_2 = latitude$, $x_3 = rata-rata hujan bulanan$, $x_4 = altitude$.

1. Model penuh dengan tren waktu linier

$$\eta_{it} = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t \quad (2.15)$$

2. Model penuh aditif tanpa interaksi

$$\eta_{it} = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t \quad (2.16)$$

3. Model penuh aditif dengan interaksi

$$\eta_{it} = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}. \quad (2.17)$$

Model spatio-temporal yang dibangun menggunakan asumsi sebaran GEV, misalkan model yang dipakai adalah aditif dan interaksi, maka model dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$y_{it} \sim GEV(\mu_{it}, \sigma, \xi)$$
$$\eta_{it} = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}. \quad (2.18)$$

Model ini mempunyai struktur aditif dengan fungsi penghubung yang digunakan adalah fungsi identitas, sehingga bisa ditulis $\mu_{it} = \eta_{it}$. Pendekatan yang digunakan adalah *Gaussian Markov Random Field* (GMRF), parameter yang akan diduga disebut sebagai laten dan ditulis sebagai parameter $\theta = \{\beta, v_i, v_i, \gamma_t, \phi_t, \delta_{it}\}$, sedangkan hiperparameternya adalah $\psi =$

$\{\sigma, \tau_v, \tau_\nu, \tau_\gamma, \tau_\phi, \tau_\delta\}$. Fungsi kemungkinan dari parameter θ dengan asumsi saling bebas adalah:

$$p(\mathbf{y}|\theta, \psi) = \prod_{t=1}^N \prod_{i=1}^K p(y_{it}|\theta_{it}, \psi). \quad (2.19)$$

Semua prior dari parameter θ diasumsikan memiliki sebaran Normal dengan nilai tengah 0 dan matriks presisi $\tau(\psi)$, dapat ditulis $\theta \sim Normal(\mathbf{0}, \tau^{-1}(\psi))$ yang memiliki fungsi kepekatan peluang:

$$p(\theta|\psi) = (2\pi)^{-n/2} |\tau(\psi)|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \theta' \tau(\psi) \theta\right). \quad (2.20)$$

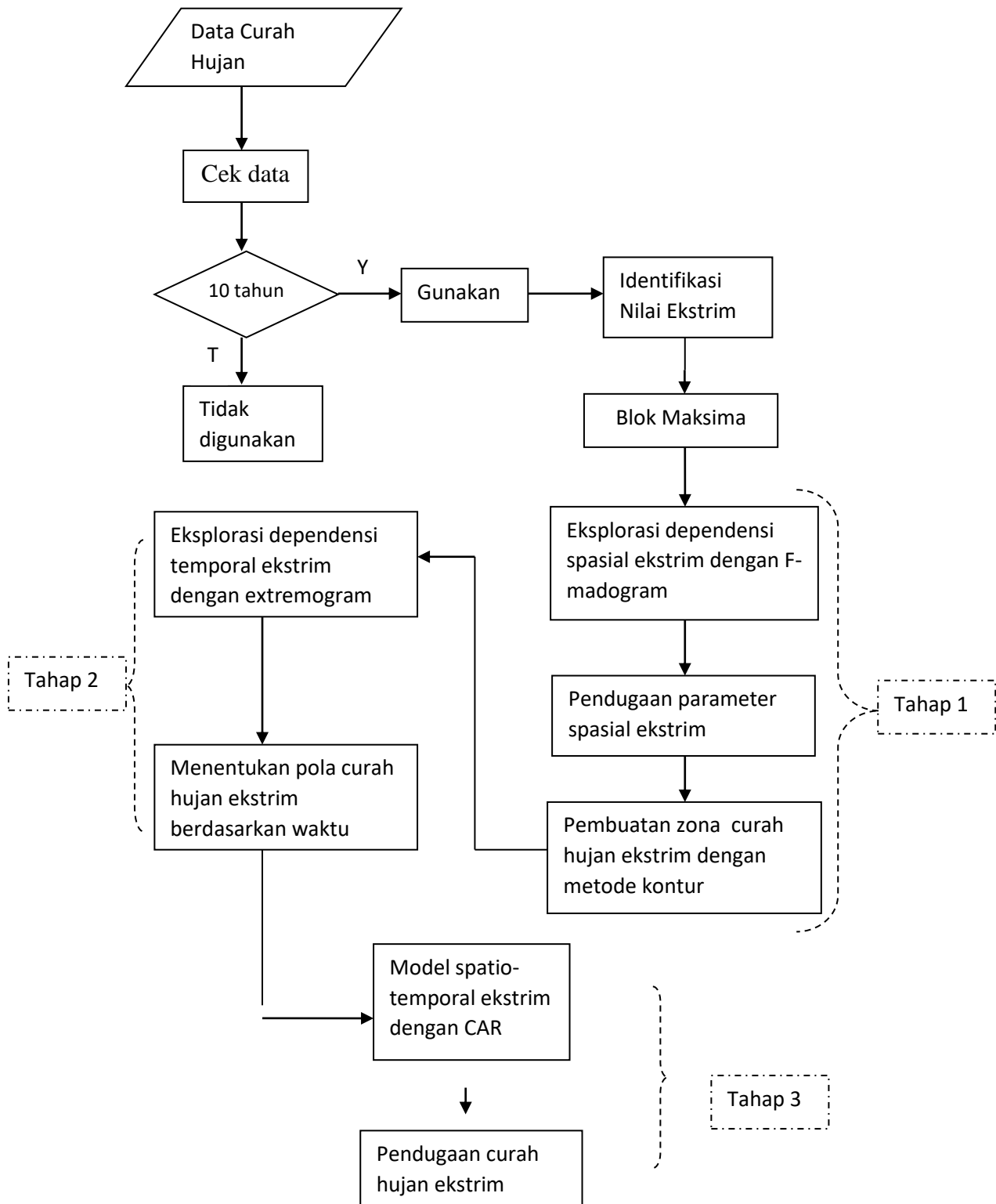
Spesifikasi dari f.k.p tersebut dikenal sebagai GMRF (Rue dan Held 2005). Sebaran posterior bersama dari θ dan ψ merupakan hasil perkalian dari fungsi kemungkinan persamaan (2.19) dan prior dari persamaan (2.20), yaitu:

$$p(\theta, \psi|\mathbf{y}) = p(\psi) \times |\tau(\psi)|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \theta' \tau(\psi) \theta - \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^K NK \log \sigma + \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \log \left[1 + \xi \left(\frac{y_{it} - \mu_{it}}{\sigma}\right)\right] + \left[1 + \xi \left(\frac{y_{it} - \mu_{it}}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right). \quad (2.21)$$

Menggunakan konsep Integrated Laplace Approximation (INLA) maka sebaran posterior dapat dicari secara komputasi (Blangiardo dan Cameletti 2015).

METODE PENELITIAN

Alur penelitian dapat dilihat pada gambar 1.

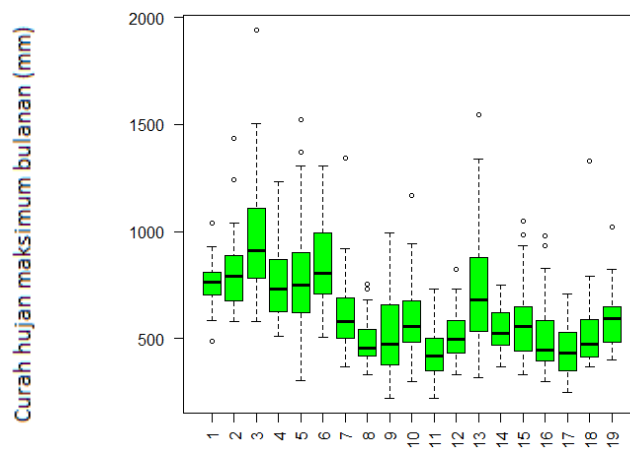


Gambar 1. Alur Metode Penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

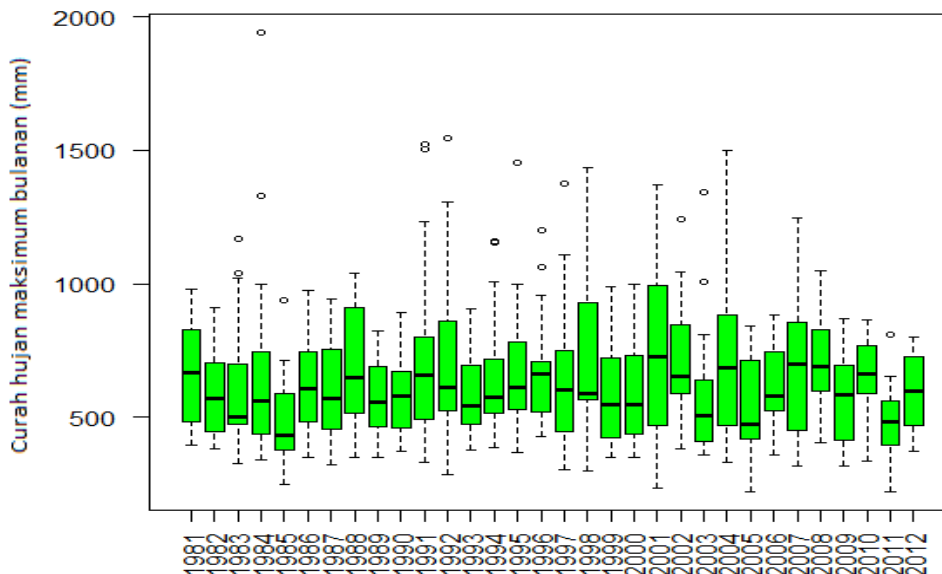
Pembentukan Zona Curah Hujan Ekstrim

Terlihat pada Gambar 2, Sekalipun nilai-nilai yang diambil adalah nilai maksimum, ternyata mayoritas stasiun hujan masih memiliki nilai pencilan di bagian atas diagram kotak garis disertai garis di atas kotak yang lebih panjang. Ini berarti sebaran data cenderung menjulur ke arah kanan (ekstrim kanan), yang berarti curah hujan berpeluang untuk jauh melebihi nilai rataannya.



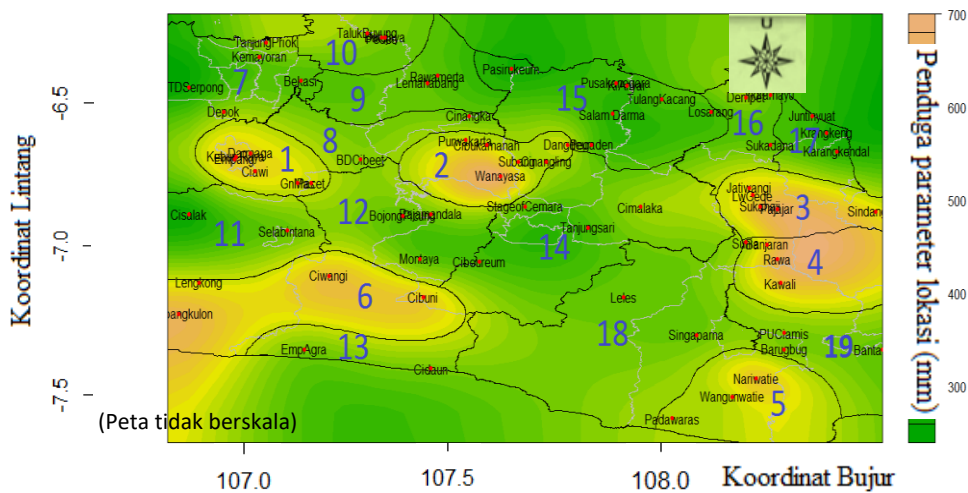
Gambar 2. Diagram Kotak Garis Curah Hujan Maksimum Bulanan di 19 ZOna (Periode 1981-2012)

Diagram kotak garis pada Gambar 3 memperlihatkan nilai-nilai pencilan yang masih terlihat jelas di bagian atas diagram kotak garis. Nilai-nilai pencilan menandakan bahwa curah hujan berdasarkan periode tahun juga memiliki peluang untuk jauh melebihi nilai rataannya.



Gambar 3. Diagram Kotak Garis Curah Hujan Maksimum Bulanan Periode Tahun 1981-2014 (19 Zona)

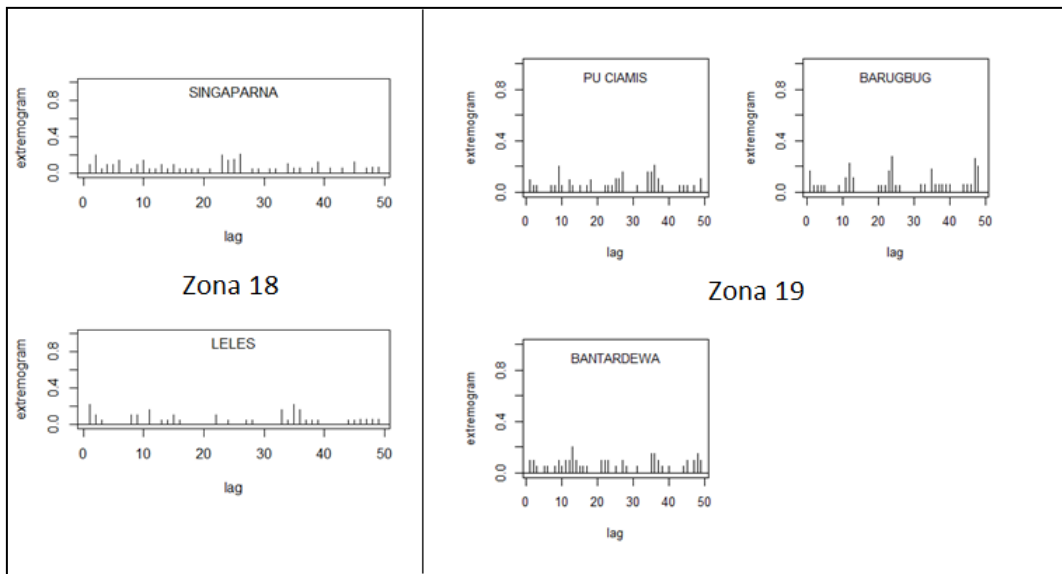
Zona curah hujan ekstrem yang terbentuk dari thin plate spline sebanyak 19 zona yang dapat dilihat pada gambar 4. Pewilayahan yang dihasilkan *thin-plate spline* memberikan hasil yang baik, bila ditinjau dari bentuk zona pewilayahan hujan ekstrem, maka *thin-plate spline* memberikan hasil terbaik dari segi pengelompokan dan kemulusan gambar.



Gambar 4. Plot kontur penduga parameter lokasi dengan thin plate spline

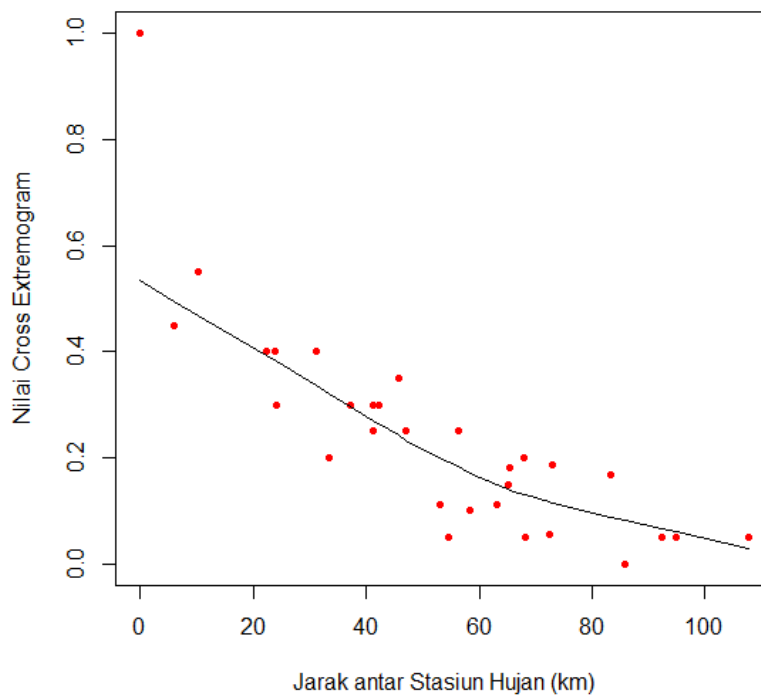
Identifikasi Pola Curah Hujan Ekstrem dengan Extremogram

Gambar 5 merupakan plot *extremogram* di zona 18 dan 19. Plot *extremogram* di zona 18 memberikan pola yang tidak periodik, hampir tidak ada nilai *extremogram* yang berulang di zona ini. Plot *extremogram* di zona 19 masih dapat dikatakan memiliki pola yang periodik, hal ini ditunjukkan pada nilai puncak yang berulang di lag 12 dan 13.



Gambar 5. Plot *Extremogram* Di Zona 18 Dan Zona 19

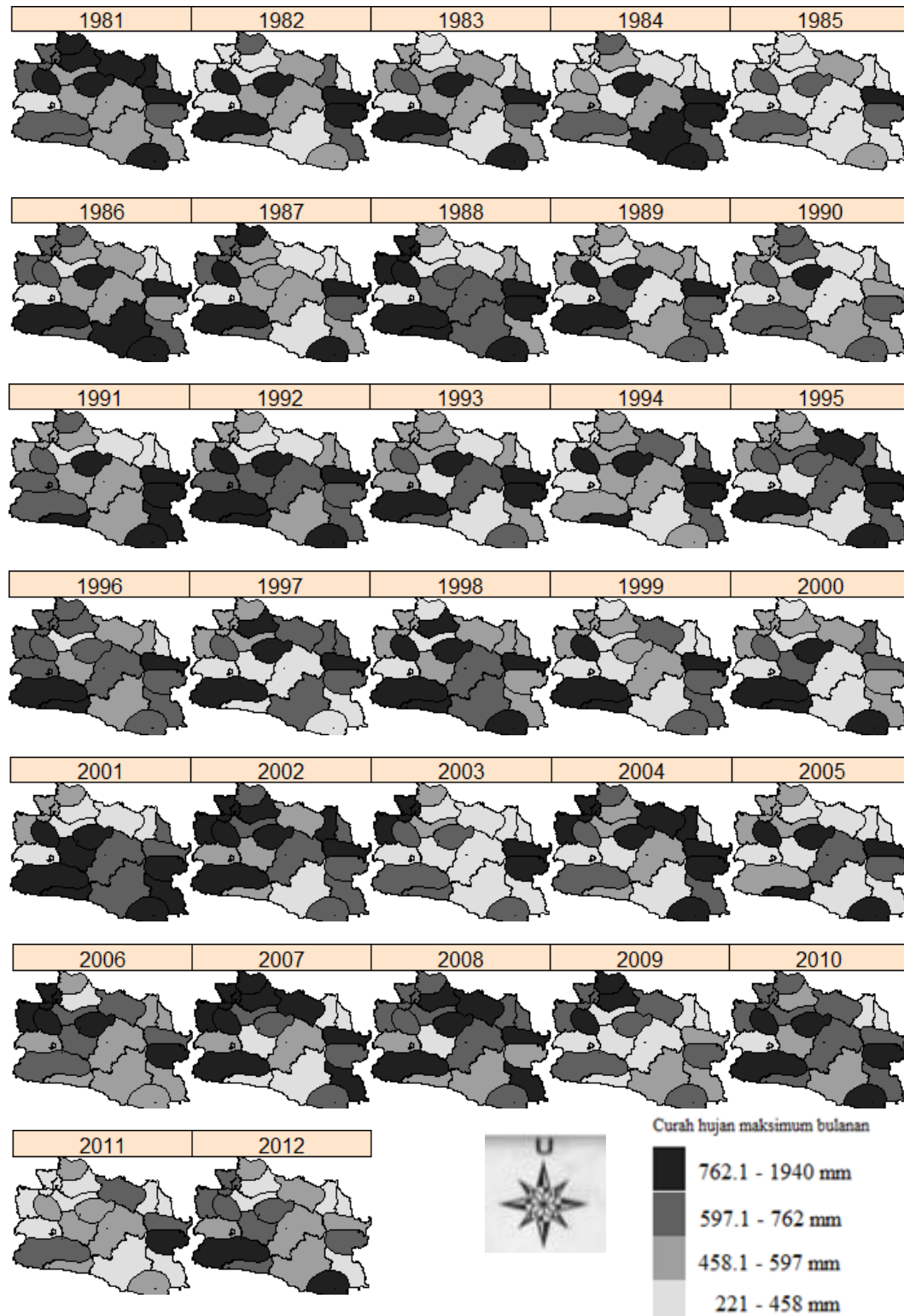
Konsep *cross-extremogram* dapat digunakan untuk melihat sejauh mana curah hujan stasiun satu dan lainnya saling mempengaruhi berdasarkan jarak. Gambar 6 memperlihatkan semakin jauh jarak satu stasiun dengan stasiun lainnya, nilai dependensi runtun waktu untuk curah hujan ekstrim juga semakin kecil. Pola dependensi *cross-extremogram* berdasarkan jarak antar stasiun hujan memperlihatkan penurunan yang cukup signifikan di bawah 60 km, sedangkan di atas 60 km memperlihatkan pola yang cenderung mendatar. Hal ini menandakan dependensi curah hujan ekstrim memiliki nilai yang kuat di dalam radius 60 km, sedangkan di atas jarak tersebut hampir tidak ada dependensi.



Gambar 6. Plot Antara *Cross-Extremogram* Dan Jarak Antar Stasiun

Model Spatio-temporal Ekstrim

Guna memperlihatkan karakteristik curah hujan maksimum di zona curah hujan ekstrim, disajikan berupa pemetaan yang dapat dilihat pada Gambar 7. Curah hujan maksimum memperlihatkan pola yang bervariasi baik dilihat dari faktor lokasi maupun waktu, terlihat pula pola penggerombolan dari beberapa zona yang menandakan adanya asosiasi spasial.



Gambar 7. Peta Hujan Maksimum Bulanan Di Zona Hujan Ekstrim (mm) Periode 1981-2012

Bila dilihat dari tingginya intensitas curah hujan dari periode waktu, maka Gambar 7 telah menunjukkan pola yang sesuai dengan tahun terjadinya La Nina, seperti pada tahun 1988, 1989, 2001, dan 2010. Curah hujan maksimum bulanan pada tahun-tahun tersebut terlihat lebih tinggi dibandingkan tahun lainnya. Beberapa zona curah hujan ekstrim, seperti zona 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 menunjukkan nilai curah hujan yang tinggi hampir di setiap tahun, ini memperlihatkan kesesuaian pada pembentukan zona curah hujan ekstrim.

Setelah dilakukan pendugaan melalui metode INLA, maka dapat dibandingkan model-model yang memiliki performa terbaik. Pada Tabel 1 dapat dilihat hasil uji kebaikan model menggunakan DIC dan MLL. Nilai DIC dan MLL yang kecil mengindikasikan model yang semakin fit.

Tabel 1. Nilai Uji Kebaikan Model Menggunakan DIC dan MLL

Model	DIC	MLL
Model tanpa peubah penjelas		
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t$	8456.26	-4921.78
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t$	8214.38	-4118.12
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}$	8214.7	-4119.57
Model dengan peubah penjelas $x_1 = longitude, x_2 = latitude, x_3 = hujan\ rata - rata,$ $x_4 = altitude$	DIC	MLL
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + x_2\beta_2 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t$	8283.03	-4195.62
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + x_2\beta_2 + v_i + \gamma_t + \phi_t$	8204.78	-4110.34
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + x_2\beta_2 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}$	8196.00	-4108.36

Tabel 1 menunjukkan bahwa model *spatio-temporal* dengan penguraian komponen aditif dan interaksi serta menggunakan peubah penjelas koordinat *latitude* merupakan model terbaik, karena memberikan nilai DIC terkecil. Performa prediksi dugaan model dapat dilihat dari pendugaan terbaik menggunakan *Root Mean Square Error Prediction* (RMSEP) dan *Absolute Average Deviance* (AAPE). Nilai-nilai RMSEP dan AAPE yang semakin kecil menandakan performa dugaan model yang semakin baik, hal ini dapat dilihat pada Tabel 2. Model dengan performa dugaan yang terbaik dari Tabel 2 tersebut adalah model aditif dan interaksi menggunakan peubah penjelas koordinat *longitude* dan rata-rata hujan bulanan, model tersebut memiliki nilai RMSEP dan AAPE yang paling kecil.

Tabel 2. Nilai RMSEP dan AAPE

Model	RMSEP	AAPE
Model tanpa kovariat		
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t$	250.9943	182.3683
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t$	258.8267	185.2222
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}$	259.4704	185.571
Model dengan kovariat, $x_1 = longitude, x_2 = latitude, x_3 = rata -$ $rata\ hujan\ bulanan, x_4 = altitude$	RMSEP	AAPE

Model : $\mu_{it} = \beta_0 + x_3\beta_3 + v_i + v_i + (\alpha + \delta_i) \times t$	209.7117	146.5833
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + x_3\beta_3 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t$	207.6539	143.7897
Model : $\mu_{it} = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_3\beta_3 + v_i + v_i + \gamma_t + \phi_t + \delta_{it}$	200.5256	138.7312

Tabel 3 menyajikan nilai dugaan parameter untuk model aditif dan interaksi dengan peubah penjelas koordinat *latitude* yang memberikan nilai DIC dan *marginal loglikelihood* terkecil. Secara umum nilai dugaan parameter memberikan hasil yang signifikan dengan ditandai pendugaan yang berada di antara nilai kuantil 0.025 dan kuantil 0.975. Nilai penduga koefisien *latitude* yang negatif menandakan bahwa semakin ke arah Selatan maka curah hujan ekstrim semakin berpeluang terjadi di wilayah Jawa Barat.

Tabel 4 menyajikan nilai dugaan parameter untuk model aditif dan interaksi dengan peubah penjelas rata-rata hujan bulanan dan koordinat *longitude* yang memberikan nilai RMSEP dan AAPE terkecil. Nilai penduga koefisien rata-rata hujan bulanan yang positif menandakan bahwa semakin besar nilai rata-rata hujan bulanan maka semakin besar pula curah hujan ekstrim yang terjadi. Sedangkan untuk penduga koefisien *longitude* yang positif menandakan bahwa semakin ke arah Timur wilayah Jawa Barat maka curah hujan ekstrim semakin tinggi terjadi.

Tabel 3. Nilai Dugaan Parameter Model Aditif Dan Interaksi *Spatio-Temporal* Dengan Peubah Penjelas Koordinat *Latitude*

Parameter	Koefisien	Simpangan Baku	Kuantil 0.025	Kuantil 0.5	Kuantil 0.975	Modus
<i>Intercept</i>	526.553	12.151	505.425	525.522	558.096	525.004
<i>Latitude</i>	-34.683	9.124	-55.378	-34.485	-16.688	-34.625
τ_{GEV}	0.000035	0.0000023	0.000029	0.000035	0.000041	0.000035
ξ_{GEV}	0.077	0.0065	0.063	0.071	0.092	0.076
σ^2_v (spasial terstruktur)	1.4×10^{-3}	0.001071	0.024618	0.002353	0.000319	0.009324
σ^2_v (spasial tak terstruktur)	1.1×10^{-4}	0.000949	0.000156	0.000115	8.6×10^{-5}	0.000113
σ^2_γ (temporal terstruktur)	5.13×10^{-5}	5.14×10^{-5}	0.000787	7.29×10^{-5}	1.4×10^{-5}	0.000292
σ^2_ϕ (temporal tak terstruktur)	5.77×10^{-5}	5.09×10^{-5}	0.000848	8.79×10^{-5}	1.4×10^{-5}	0.000312
σ^2_δ (interaksi spatio-temporal)	4.89×10^{-5}	5.03×10^{-5}	0.000893	6.9×10^{-5}	1.3×10^{-5}	0.000352

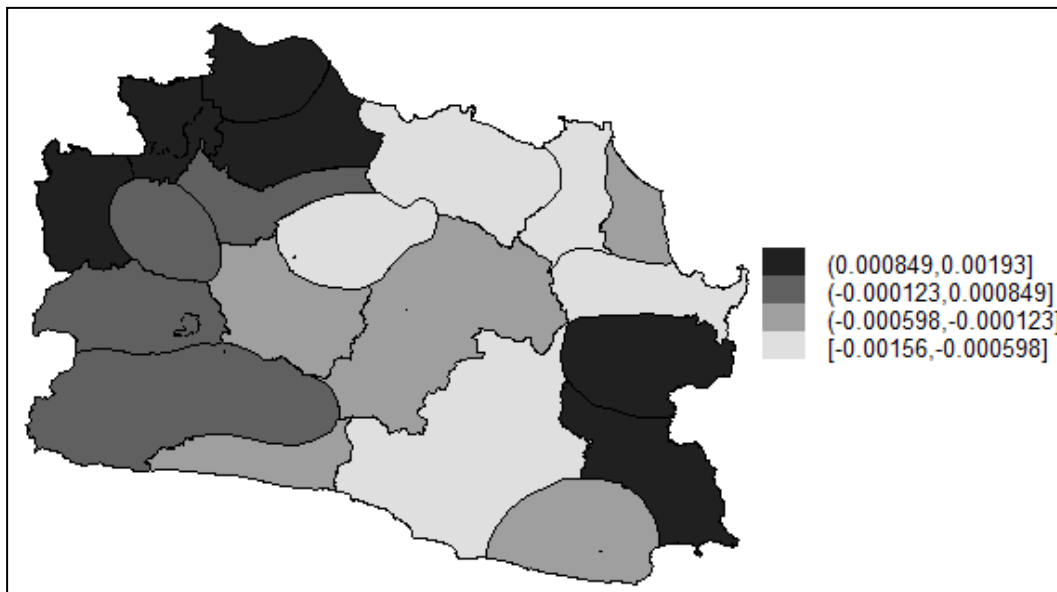
Tabel 4. Nilai Dugaan Parameter Model Aditif Dan Interaksi *Spatio-Temporal* Dengan Peubah Penjelas *Longitude* Dan Rata-Rata Hujan Bulanan

Parameter	Koefisien	Simpangan Baku	Kuantil 0.025	Kuantil 0.5	Kuantil 0.975	Modus
<i>Intercept</i>	173.3579	181.8026	-193.4973	201.9745	465.0199	273.9369
Rataan hujan	2.1575	0.8411	0.9774	2.1085	3.9015	1.2870
<i>Longitude</i>	21.5408	73.7140	-109.1296	37.5230	127.4614	98.0056
τ_{GEV}	1.34×10^{-5}	1.58×10^{-7}	1.31×10^{-5}	1.34×10^{-5}	1.36×10^{-5}	1.35×10^{-5}
ξ_{GEV}	-0.20	0.0018	-0.203	-0.199	-0.196	-0.199
τ_v (spasial terstruktur)	0.001289	0.0158	0.001518	0.001293	0.001103	0.001301
τ_v (spasial tak terstruktur)	6.11×10^{-5}	0.000211	9.14×10^{-5}	6.62×10^{-5}	3.48×10^{-5}	8.16×10^{-5}
τ_γ (temporal terstruktur)	2.89×10^{-5}	5.42×10^{-5}	3.1×10^{-5}	2.92×10^{-5}	2.56×10^{-5}	3.05×10^{-5}
τ_ϕ (temporal tak terstruktur)	8.34×10^{-5}	0.000711	0.000105	8.43×10^{-5}	6.63×10^{-5}	8.63×10^{-5}
τ_δ (interaksi spatio-temporal)	0.000106	0.001022	0.000136	0.000106	9×10^{-5}	0.000102

Proporsi keragaman spasial dari model dapat dicari dengan menghitung:

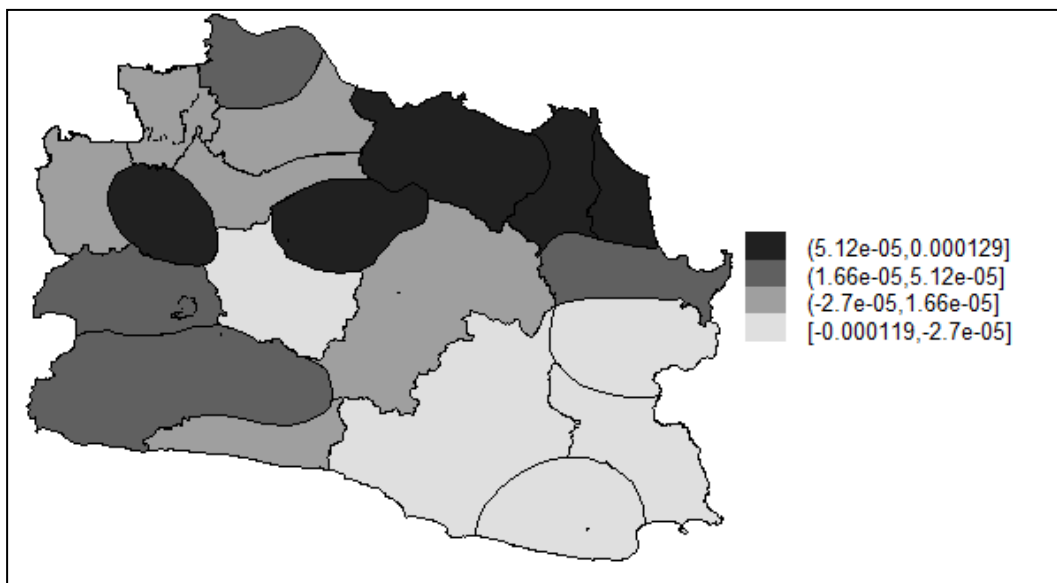
$frac_{spatial} = \frac{s_v^2}{s_v^2 + \sigma_v^2}$, dengan $s_v^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}{n-1}$. Proporsi keragaman spasial untuk model dengan peubah penjelas peubah penjelas *latitude* adalah 0.929, sedangkan proporsi keragaman spasial model dengan peubah penjelas *longitude* dan rata-rata hujan bulanan adalah 0.906, ini berarti model dengan peubah penjelas *latitude* lebih baik dalam menjelaskan keragaman spasial. Sedangkan proporsi keragaman temporal dapat dihitung dengan: $frac_{temporal} = \frac{s_\gamma^2}{s_\gamma^2 + \sigma_\phi^2}$, dengan $s_\gamma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma_i - \bar{\gamma})^2}{n-1}$. Proporsi keragaman temporal model dengan peubah penjelas *latitude* sebesar 0.357, sedangkan model peubah penjelas *longitude* dan rata-rata hujan bulanan memberikan proporsi keragaman temporal yang lebih baik, yaitu sebesar 0.470.

Gambar 8 menunjukkan pengaruh spasial model aditif dan interaksi dengan peubah penjelas *latitude*. Pada tersebut menunjukkan bahwa di zona 7, 8, 9 sekitar wilayah Jakarta, Depok, Bekasi serta ke arah Selatan wilayah Bogor (zona 1) memberikan pengaruh spasial yang kuat. Sedangkan di daerah Ciamis (zona 19) dan Kuningan (zona 4) juga memberikan pengaruh spasial yang kuat di dibandingkan wilayah lainnya



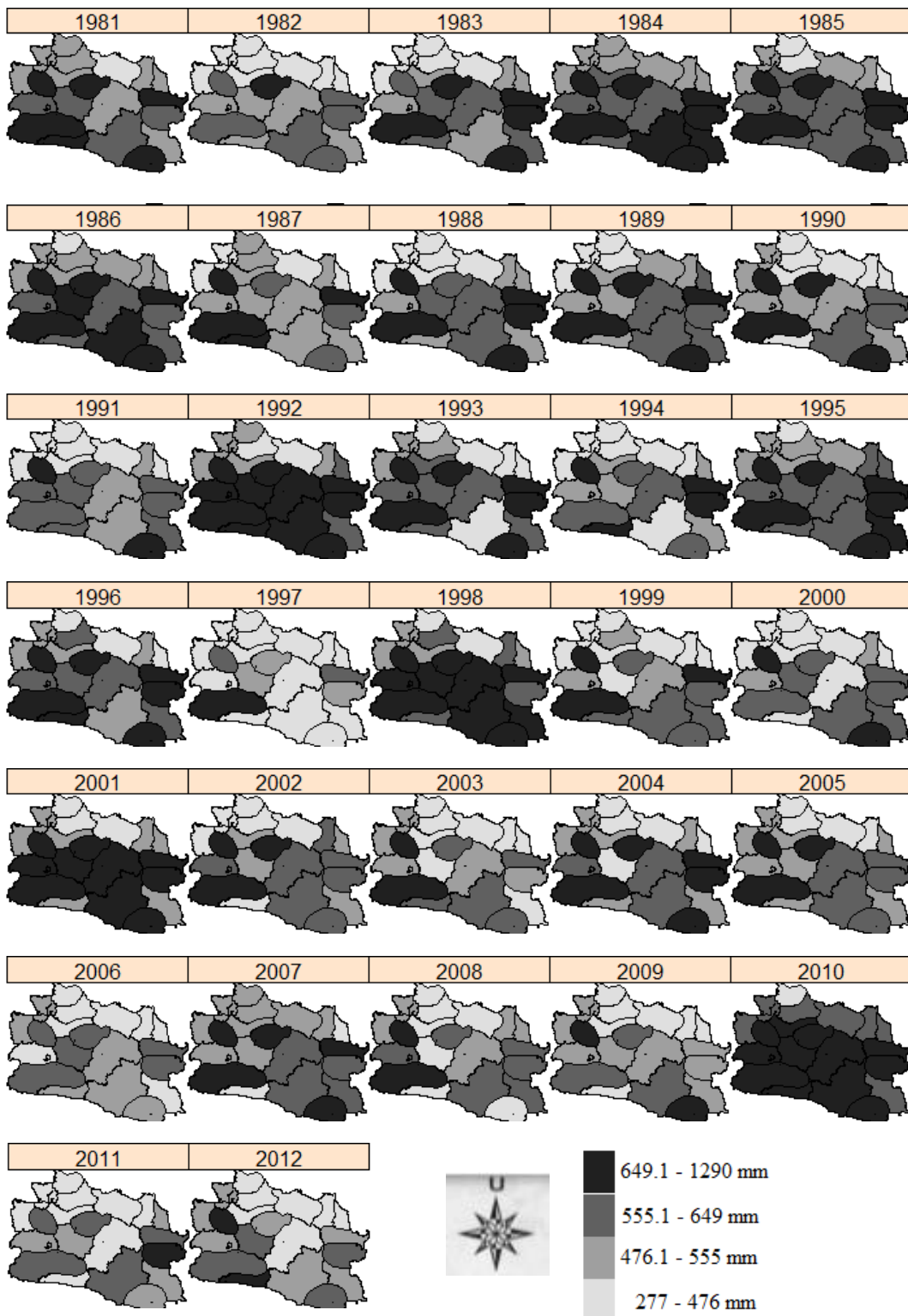
Gambar 8. Pengaruh Spasial Model Aditif Dan Interaksi *Spatio-Temporal* Dengan Peubah Penjelas *Latitude*

Gambar 9 menunjukkan rata-rata posterior pengaruh spasial model aditif dan interaksi dengan peubah penjelas *longitude* dan rata-rata hujan bulanan. Pada gambar tersebut terlihat bahwa zona 1 (wilayah Bogor) memberikan pengaruh spasial yang kuat, begitupun dengan zona 2, 15, 16, dan 17 yaitu wilayah Purwakarta, Subang, Indramayu dan sekitarnya yang juga memberikan pengaruh spasial kuat.



Gambar 9. Pengaruh Spasial Model Aditif Dan Interaksi *Spatio-Temporal* Dengan Peubah Penjelas *Longitude* Dan Rata-Rata Hujan Bulanan

Nilai dugaan pada Gambar 10 menunjukkan pola yang bervariasi baik dari segi lokasi maupun dari faktor waktu. Secara umum nilai-nilai tinggi untuk keseluruhan zona terdapat pada periode tahun 1984, 1985, 1986, 1992, 1995, 1996, 1998, 2001, 2007, dan 2010.



Gambar 10. Peta Pendugaan Curah Hujan Ekstrim Dengan Model Aditif Interaksi Peubah Penjelas *Longitude* Dan Rata-Rata Hujan Bulanan

Zona-zona yang menghasilkan nilai pendugaan curah hujan ekstrim tinggi untuk setiap tahunnya adalah di zona 1, 2, 3, 4, 5, dan zona 6. Bila dihubungkan dengan tahun terjadinya La Nina seperti tahun 1984, 1985, 2001, dan 2010, maka model ini menghasilkan pendugaan yang selaras, ini terbukti

dari pendugaan yang tinggi pada tahun tersebut, bahkan pada tahun 2001 dan 2010 menunjukkan nilai dugaan untuk curah hujan ekstrim yang paling tinggi.

KESIMPULAN

Sebaran GEV yang digunakan dalam memodelkan nilai ekstrim memberikan hasil yang sangat baik. Di mulai dari pendugaan secara univariat, pemodelan secara spasial yang menghasilkan zona khusus curah hujan ekstrim, sampai dengan pemodelan secara spatio-temporal memberikan hasil yang memuaskan. Hasil pemodelan nilai ekstrim ini direncanakan dapat juga menduga kejadian ekstrim yang ada di Indonesia, seperti: gelombang tsunami dan gempa bumi. Upaya pemodelan ini membutuhkan data yang lengkap dan akurat serta keterlibatan banyak pihak, sehingga diharapkan penelitian seperti ini bisa menjadi semacam *warning system* dalam mengatasi kejadian ekstrim berupa bencana alam yang ada di Indonesia.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada BMKG beserta jajaran pimpinan yang telah bersedia memberikan data serta diskusi khususnya mengenai iklim dan curah hujan yang ada di Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- Blangiardo, M. and Cameletti, M., 2015. *Spatial and spatio-temporal Bayesian models with R-INLA*. John Wiley & Sons.
- Cooley, D., Naveau, P. and Poncet, P., 2006. Variograms for spatial max-stable random fields. In *Dependence in probability and statistics* (pp. 373-390). Springer, New York, NY.
- Cooley D, Nychka D, and Naveau P., 2007. Bayes spatial modeling of extreme precipitation return levels. *Journal of the American Statistical Association*, 102: 824-840.
- Davis, R.A. and Mikosch, T., 2009. The extremogram: A correlogram for extreme events. *Bernoulli*, 15(4), pp.977-1009.
- Davison, A.C., Padoan, S.A. and Ribatet, M., 2012. Statistical modeling of spatial extremes. *Statistical science*, 27(2), pp.161-186.
- Rinaldi, A., 2015. Aplikasi Model Persamaan Struktural Pada Program R (Studi Kasus Data Pengukuran Kecerdasan). *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(1), pp.1-12.
- Rinaldi, A., 2016. Sebaran Generalized Extreme Value (GEV) dan Generalized Pareto (GP) untuk Pendugaan Curah Hujan Ekstrim di Wilayah DKI Jakarta. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), pp.75-84.
- Rinaldi, A., Djuraidah, A., Wigena, A.H., Mangku, I.W. and Gunawan, D., 2017. Spatial extreme models with copula to determine extreme rainfall zone. *Applied Mathematical Sciences*, 11(27), pp.1327-1336.
- Rinaldi, A., 2018. Pengembangan Model Spatio-temporal Conditional Autoregressive untuk Pendugaan Curah Hujan Ekstrim di Wilayah Jawa Barat. [Disertasi]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- Rinaldi, A., Djuraidah, A., Wigena, A.H., Mangku, I.W. and Gunawan, D., 2018. Identification of Extreme Rainfall Pattern Using Extremogram in West Java. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* (Vol. 187, No. 1, p. 012064). IOP Publishing.
- Rue, H. and Held, L., 2005. *Gaussian Markov random fields: theory and applications*. Chapman and Hall/CRC.